Evelyn Schirmer

Kubische Splines - eine naive Einführung

Achterbahnen müssen Spaß machen, Angst einjagen, die Nerven kitzeln und den Mageninhalt neu ordnen. Aber wie werden diese Bahnen eigentlich konstruiert? Was muss beachtet werden, damit die Bahn sicher für die Insassen ist? Bevor gebaut wird, ist dazu erst mal einiges an Mathematik nötig. Um die Bahnkurve zu konstruieren, gibt man sich in der Regel Punkte vor, durch die die Bahn verläuft. Aus der Schule ist für eine solche Aufgabe evtl. das Verfahren der Polynominterpolation bekannt, die einen ersten Anknüpfungspunkt darstellt. Die Grenzen dieses Verfahrens sind aber im Kontext der Achterbahnkonstruktion schnell erreicht. Das Konstruieren einer Achterbahn ist deutlich komplizierter. Schließlich muss nicht nur bedacht werden, dass die Achterbahn eine 3D-Kurve ist, sondern auch, dass der Mensch das Magenchaos nur in beschränktem Maße aushält. Ganz zu schweigen davon, dass wir für einen Wagen, der die Achterbahn entlang rollt, Schienen brauchen. Also sind das im Grunde zwei Kurven, die parallel laufen. Die Geschwindigkeit muss begrenzt sein, um die Kräfte auf die Insassen gering zu halten usw. Die mathematischen und physikalischen Problemen wollen wir hier ansatzweise einem Schüler, der Gleichungssysteme lösen kann und den Begriff der Funktion, insbesondere Polynome im Hinblick auf Ableitungen versteht, etwas näher bringen. Es folgt eine naive Heranführung an das Thema Splines, konzipiert für den Schulunterricht.

1. Einleitung

Versucht man ein langes Brett durch vorgegebene Punkte einzuspannen, so nimmt das Brett den Zustand minimalster potentieller Energie ein. Man kennt das auch aus dem Alltag, je mehr sich ein Brett biegen soll, also je mehr es gekrümmt sein soll, desto mehr Kraft muss aufgebracht werden, um es in diesen Zustand zu versetzen. Ein so eingespanntes Brett nimmt in diesem Zustand auch die minimale Krümmung ein. Krümmung ist ein mathematischer Begriff, der eine Abweichung von dem misst, was gerade ist. Um so etwas zu messen, orientiert man sich an Kreisen, die man an die Stellen, die von Interesse sind, an die Kurve bzw. das gebogene Brett anlegt - man sagt auch *anschmiegt*. Ein Kreis mit einem sehr großen Radius ist an einem beliebigen Punkt auf dem Kreis weniger *krumm*, als ein Kreis mit einem sehr kleinen Radius. Abhängig von diesem Radius kann man dann die Krümmung an einer Stelle der Kurve bestimmen. Liegt die Kurve in der Ebene gibt uns die zweite Ableitung Information über die Krümmung, denn die zweite Ableitung ist ja gerade als die Änderung der Steigung, also die Änderung der ersten Ableitung, definiert. Ein gerades Brett, das gebogen wird, wird auch gekrümmt. Man nennt jene Kurven, die sich wie ein solches Brett, das zwischen zwei oder mehr Punkten eingespannt ist, verhalten, Splines. Historisch kommt der Begriff aus dem Schiffsbau, wo lange Bretter für den Bau des Rumpfes in Form gezwängt werden.

Auch für den Bau von Achterbahnen oder Straßen verwendet man Splines, um die Krümmung von Kurven möglichst gering zu halten.

Da in einigen Bundesländern mit einer sogenannten Kurvendiskussion vor allem gegebenen Funktionen untersucht werden, bereichert die vorliegende Arbeit den Unterricht dahingehend, dass gerade der umgekehrte Weg gezeigt wird, wie er in der Anwenderpraxis eine Rolle spielt: Aus irgendwelchen Angaben heraus werden Funktionen mit Hilfe der Kurvendiskussion entwickelt. Das Folgende zeigt aber auch, dass Schulunterricht in aller Regel nicht in der Lage ist, bis zur echten Anwendung vorzustoßen, wie häufig kritisiert worden ist, siehe z.B. [3],[4] und [5].

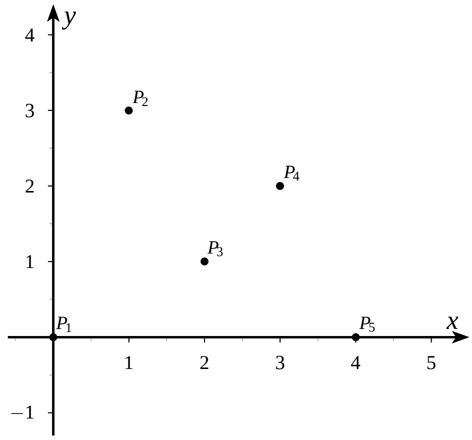
2. Konstruktionsaufgabe

Unsere Aufgabe ist es nun, ein Teilstück einer Achterbahn zu konstruieren, das erstmal ohne besondere Effekte - wie Loopings oder Schrauben - auskommt. Die Passagiere sollten zunächst nicht in eine Überkopflage versetzt werden. Auch eine Seitenlage oder eine Kurve nach links oder rechts wollen wir bei dieser ersten Konstruktion nicht betrachten. Die Achterbahn fährt also von oben betrachtet eine gerade Strecke. Die Effekte auf den Passagier sind nur durch Hügel und Täler gegeben. Start- und Endpunkt sind demnach auch nicht gleich. Der Unterschied zu einer Bahn, die eine tatsächliche *Runde* dreht, ist nicht von Bedeutung. Man stelle sich einfach vor, die Achterbahn liege auf der Mantelfläche eines Zylinders. Wickelt man den Zylinder ab, so liegt die Bahn in einer Ebene.

Rein anschaulich möchten wir also eine Achterbahn durch eine Anzahl vorgegebener Punkte konstruieren. In unserem Fall wählen wir die Punkte P_1 bis P_5, deren Koordinaten folgendermaßen lauten:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	3	1	2	0

Die Achterbahn soll nun in Punkt P_1 starten und in P_5 enden, in der Nähe der Zwischenpunkte P_2 und P_4 wollen wir durch diese Wahl Berge und bei P_3 ein Tal erzwingen.



3. Interpolation durch Polynome

Bei der Interpolation durch Polynome sucht man ein Polynom $p(x)$, das durch die vorgegebene Punkte, hier P_1 bis P_5 verläuft. Das bedeutet in unserem Fall, wir suchen $p(x)$, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind. Das

Bedingungen	**Beschreibung**	**Anzahl**
$p(x_i) = y_i, \quad i = 1,...,5$	Interpolationsbedingungen	5

sind insgesamt 5 Gleichungen, also 5 Bedingungen, die ein solches Polynom $p(x)$ erfüllen muss. Ein Polynom vom Grad n hat allgemein die Darstellung

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

wobei $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $a_n \neq 0$ gelten muss, sollte man von einem Polynom vom Grad echt gleich n sprechen wollen.

3.1 Minimaler Polynomgrad

Durch 5 Punkte in allgemeiner Lage verläuft genau ein Polynom vom Grad 4. Allgemeine Lage heißt hier, dass die 5 Punkte nicht zufälligerweise bereits auf einer Geraden, dem Funktionsgraphen eines quadratischen oder kubischen Polynoms liegen, denn das muss ja nicht notwenigerweise der Fall sein. Wir suchen also ein Polynom der Form

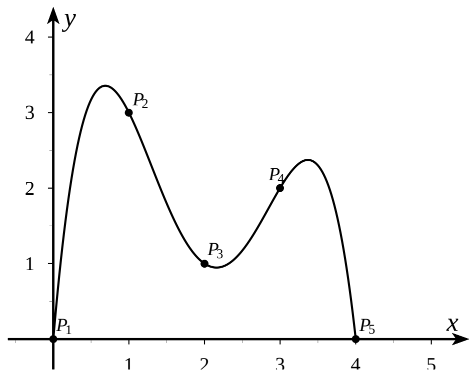
$$p(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit reellen Koeffizienten a_i und $a_4 \neq 0$. Dieses hat 5 zu bestimmende Koeffizienten, die wir mit Hilfe unserer 5 gegebenen Gleichungen eindeutig bestimmen können. Es müssen erfüllt sein:

$$\begin{aligned}
p(0) &= & a_0 &= 0\\
p(1) &= \quad a_4 + \quad a_3 + \quad a_2 + \ a_1 + & a_0 &= 3\\
p(2) &= \ 16a_4 + \ 8a_3 + \ 4a_2 + 2a_1 + & a_0 &= 1\\
p(3) &= \ 81a_4 + 27a_3 + \ 9a_2 + 3a_1 + & a_0 &= 2\\
p(4) &= 256a_4 + 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + & a_0 &= 0
\end{aligned}$$

Da $a_0 = 0$, liegt nur ein System mit 4 Gleichungen vor. Da man aber z. B. aus $p(1) = 3$ die Größe a_1 abhängig von a_2, a_3, a_4 ausrechnen kann, liegt also nur noch ein System von 3 Gleichungen in 3 Unbekannten vor. Mit der Lösung des Gleichungssystems ergibt sich das gesuchte Interpolationspolynom

$$p(x) = -\frac{7}{12}x^4 + \frac{29}{6}x^3 - \frac{155}{12}x^2 + \frac{35}{3}x.$$



3.2 Erhöhung des Polynomgrads

Was passiert, wenn man noch mehr Stützstellen dazunimmt, um den Verlauf der Kurve stärker zu kontrollieren? Zunächst wird der Grad des Polynoms, das wir durch die Punkte legen wollen, einen höheren Grad aufweisen, da wir mehr Bedingungen an das gesuchte Polynom stellen. Ein höherer Grad bedeutet aber auch mehr Oszillationen. Je mehr Punkte wir nehmen, desto mehr Extremstellen werden evtl. nötig, um eine Funktion durch die Punkte zu legen. Dies ist natürlich auch von der Lage der Punkte abhängig. Wir nehmen beispielsweise vier weitere Punkte, $Q_1 = (0.5|2)$, $Q_2 = (1.5|1.3)$, $Q_3 = (2.5|1.4)$ und $Q_4 = (3.5|1.5)$, dazu. Gesucht ist nun ein Polynom 8. Grades

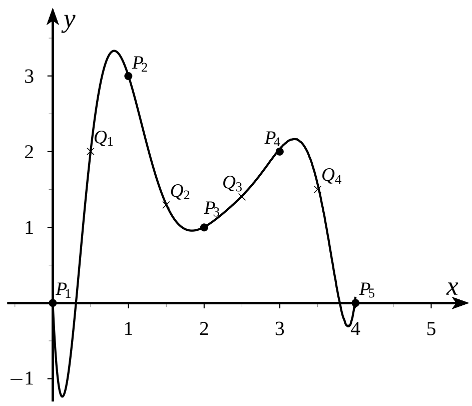
$$p(x) = a_8x^8 + a_7x^7 + \ldots + a_1x + a_0,$$

das durch die folgenden 9 Gleichungen eindeutig bestimmt ist:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
p(0) = & & & & & & & & & a_0 = & 0 \\
p(\frac{1}{2}) = & \frac{1}{256}a_8+ & \frac{1}{128}a_7+ & \frac{1}{64}a_6+ & \frac{1}{32}a_5+ & \frac{1}{16}a_4+ & \frac{1}{8}a_3+ & \frac{1}{4}a_2+ & \frac{1}{2}a_1+ & a_0 = & 2 \\
p(1) = & a_8+ & a_7+ & a_6+ & a_5+ & a_4+ & a_3+ & a_2+ & a_1+ & a_0 = & 3 \\
p(\frac{3}{2}) = & \frac{6561}{256}a_8+ & \frac{2187}{128}a_7+ & \frac{729}{64}a_6+ & \frac{243}{32}a_5+ & \frac{81}{16}a_4+ & \frac{27}{8}a_3+ & \frac{9}{4}a_2+ & \frac{3}{2}a_1+ & a_0 = & 1.3 \\
p(2) = & 256a_8+ & 128a_7+ & 64a_6+ & 32a_5+ & 16a_4+ & 8a_3+ & 4a_2+ & 2a_1+ & a_0 = & 1 \\
p(\frac{5}{2}) = & \frac{5^8}{256}a_8+ & \frac{5^7}{128}a_7+ & \frac{5^6}{64}a_6+ & \frac{3125}{32}a_5+ & \frac{625}{16}a_4+ & \frac{125}{8}a_3+ & \frac{25}{4}a_2+ & \frac{5}{2}a_1+ & a_0 = & 1.4 \\
p(3) = & 6561a_8+ & 2187a_7+ & 729a_6+ & 243a_5+ & 81a_4+ & 27a_3+ & 9a_2+ & 3a_1+ & a_0 = & 2 \\
p(\frac{7}{2}) = & \frac{7^8}{256}a_8+ & \frac{7^7}{128}a_7+ & \frac{7^6}{64}a_6+ & \frac{7^5}{32}a_5+ & \frac{2401}{16}a_4+ & \frac{343}{8}a_3+ & \frac{49}{4}a_2+ & \frac{7}{2}a_1+ & a_0 = & 1.5 \\
p(3) = & 65536a_8+ & 16384a_7+ & 4096a_6+ & 1024a_5+ & 256a_4+ & 64a_3+ & 16a_2+ & 4a_1+ & a_0 = & 0
\end{array}$$

Die Lösung erhält man mit Hilfe des Computers und führt uns zu der Darstellung des Polynoms

$$p(x) = \frac{44}{225}x^8 - \frac{5176}{1575}x^7 + \frac{206}{9}x^6 - \frac{19156}{225}x^5 + \frac{162539}{900}x^4 - \frac{96089}{450}x^3 + \frac{7417}{60}x^2 - \frac{11731}{525}x.$$



Die Funktion weist zwei Extremstellen am Rand auf, die wir so nicht erwartet haben und die auch für den Verlauf der Achterbahn nicht erwünscht sind. Wir sehen also, dass wir zwar den Verlauf der Bahn in dem Sinn bestimmt haben, dass wir den Verlauf durch die Punkte Q_1 bis Q_4 erzwungen haben. Dadurch sind aber in der Nähe der Randpunkte 0 und 4 Extremstellen und starke Steigungen aufgetreten.

Die Hinzunahme weiterer Punkte, die möglicherweise den Verlauf zwischen P_1 und Q_1 sowie zwischen Q_4 und P_5 kontrollieren, wird hier keine Abhilfe schaffen. Dadurch würde man möglicherweise weitere - im Vorhinein unkontrollierbare - Extremstellen und dadurch bedingte Ausschläge des Funktionsgraphen in Kauf nehmen.

4. Lineare Splines

Statt *eine* Funktion zu berechnen, die durch alle Stützstellen verläuft, ist es eine andere Idee, zwischen zwei Stützstellen je eine Funktion zu legen, um so den Verlauf der Kurve hinsichtlich ihrer Extremstellen und den damit verbundenen Ausschlägen zu kontrollieren. Dieses Verfahren nennt man Interpolation mittels Splines.

Zunächst beschäftigen wir uns mit linearen Splines. Ein linearer Spline ist eine Funktion, die aus mehreren Geradenstücken zusammengesetzt wird. Er kann also nur stückweise definiert werden. Wir bezeichnen einen solchen Spline im Folgenden mit s. Zu unseren 5 Funktionswerten, berechnen wir 4 Geradenstücke, die die Interpolationsbedingungen $s(x_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, 4$ erfüllen. Unser Spline hat im Intervall $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ die Form $s(x) = a_ix + b_i$. Wir bezeichnen mit

$$s_i(x) = s_{[x_i, x_{i+1}]}(x) = a_ix + b_i$$

den Teil des linearen Splines, der im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ zwischen den Punkten P_i und P_{i+1} für $i = 1,\dots,4$ interpoliert. In unserem konkreten Beispiel berechnen wir zwischen je zwei Stützstellen ein Geradenstück, indem wir die Interpolationsbedingungen ausnutzen.

Bedingungen	**Beschreibung**		**Anzahl**
$s_i(x_i) = y_i, \quad i = 1,\dots,4$	Interpolationsbedingungen	(*links*)	4
$s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 1,\dots,4$		(*rechts*)	4

An jedes Geradenstück $s_i(x)$ sind damit zwei Bedingungen gestellt, eine für das linke Intervallende bei x_i und eine für das rechte Intervallende bei x_{i+1}. Einen solchen Spline können wir nur stückweise in der Form

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = a_1x + b_1 & \text{für} \quad x \in [0,1] \\ s_2(x) = a_2x + b_2 & \text{für} \quad x \in [1,2] \\ s_3(x) = a_3x + b_3 & \text{für} \quad x \in [2,3] \\ s_4(x) = a_4x + b_4 & \text{für} \quad x \in [3,4] \end{cases}$$

angeben. Damit sind die Geraden $s_i(x)$ eindeutig definiert und es ist sichergestellt, dass der Spline keine Sprünge macht. In unserem Fall lösen wir für $i = 1,\dots,4$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} s_i(x_i) &= a_i x_i + b_i = y_i && (\textit{Interpolation links}) \\ s_i(x_{i+1}) &= a_i x_{i+1} + b_i = y_{i+1} && (\textit{Interpolation rechts}) \end{aligned}$$

Für unser Beispiel sind das insgesamt 4 Gleichungssysteme,

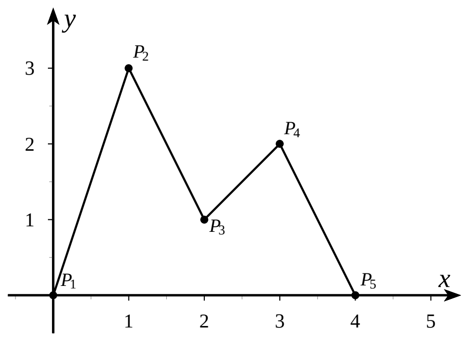
$$(1) \quad \begin{array}{rcccl} s_1(0) & = & a_1 \cdot 0 + b_1 & = & 0 \\ s_1(1) & = & a_1 \cdot 1 + b_1 & = & 3 \end{array} \qquad (3) \quad \begin{array}{rcccl} s_3(2) & = & a_3 \cdot 2 + b_3 & = & 1 \\ s_3(3) & = & a_3 \cdot 3 + b_3 & = & 2 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{rcccl} s_2(1) & = & a_2 \cdot 1 + b_2 & = & 3 \\ s_2(2) & = & a_2 \cdot 2 + b_2 & = & 1 \end{array} \qquad (4) \quad \begin{array}{rcccl} s_4(3) & = & a_4 \cdot 3 + b_4 & = & 2 \\ s_4(4) & = & a_4 \cdot 4 + b_4 & = & 0 \end{array}$$

deren Lösungen zu den folgenden linearen Funktionen und dem Spline $s(x)$ führen:

$$\begin{array}{rrll} s_1(x) = & 3x & \text{für} & x \in [0,1] \\ s_2(x) = & -2x+5 & \text{für} & x \in [1,2] \\ s_3(x) = & x-1 & \text{für} & x \in [2,3] \\ s_4(x) = & -2x+8 & \text{für} & x \in [3,4] \end{array} \qquad s(x) = \begin{cases} 3x & \text{für} \quad x \in [0,1] \\ -2x+5 & \text{für} \quad x \in [1,2] \\ x-1 & \text{für} \quad x \in [2,3] \\ -2x+8 & \text{für} \quad x \in [3,4] \end{cases}$$

Wir haben die Stützstellen mit Geradenstücken verbunden. Nun, das ist für eine Achterbahn wenig geeignet. Es wären Knicke in der Bahn. Wir wollen aber einen Wagen mit Insassen auf unsere Achterbahn schicken und tatsächlich rollen lassen. Es wäre unmöglich die Knicke zu überwinden, da der Steigungswechsel dort viel zu abrupt vor sich geht. Zum Beispiel ist der Wechsel der Steigung im Punkt $(1|3)$ von 3 auf -2 nicht stetig. Wir brauchen auf der gesamten Bahn einen kontinuierlichen d. h. stetigen Wechsel der Steigung. Um die Stetigkeit der Steigung zu gewährleisten, müssen wir die erste Ableitung mit einbeziehen.



Die Steigung sollte sich stetig ändern, aber auch nicht überall konstant sein. Letzteres wäre sehr langweilig. Mit einem Spline 1. Grades, der aus Geradenstücken besteht, ist dies nicht zu erreichen. Wir müssen den Grad der Ansatzfunktionen erhöhen, also Funktionen der Form $s_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$ für $i = 1,\dots,4$ verwenden. So erhalten wir geschwungene Funktionsstücke, die uns bei geeigneter Wahl der Koeffizienten a_i, b_i und c_i geben, Knicke zu vermeiden. Wie dies genau funktioniert, werden wir im nächsten Abschnitt sehen.

5. Quadratische Splines

5.1 Naive Berechnung

Wir benötigen 4 Funktionsstücke und haben für jedes genau zwei Interpolationsbedingungen. Wir erhalten für s_i die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} s_i(x_i) &= a_i \cdot x_i^2 + b_i \cdot x_i + c_i = y_i && (\textit{Interpolation links}) \\ s_i(x_{i+1}) &= a_i \cdot x_{i+1}^2 + b_i \cdot x_{i+1} + c_i = y_{i+1} && (\textit{Interpolation rechts}). \end{aligned}$$

Wir haben also für jedes Geradenstück s_i für $i = 1, \ldots, 4$ ein Gleichungssystem mit den 3 Unbekannten a_i, b_i, c_i, aber nur zwei Gleichungen, d. h. wir können eine der Unbekannten frei wählen.

$$(1)\quad \begin{array}{rcccl} s_1(0) &=& a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 &=& 0 \\ s_1(1) &=& a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 1 + c_1 &=& 3 \end{array} \qquad (3)\quad \begin{array}{rcccl} s_3(2) &=& a_3 \cdot 4 + b_3 \cdot 2 + c_3 &=& 1 \\ s_3(3) &=& a_3 \cdot 9 + b_3 \cdot 3 + c_3 &=& 2 \end{array}$$

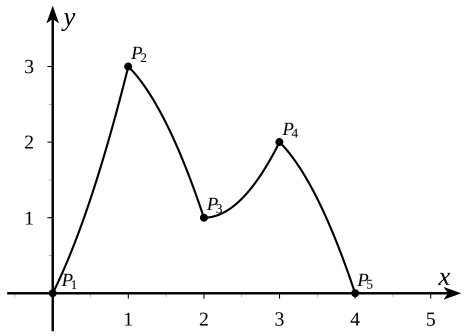
$$(2)\quad \begin{array}{rcccl} s_2(1) &=& a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot 1 + c_2 &=& 3 \\ s_2(2) &=& a_2 \cdot 4 + b_2 \cdot 2 + c_2 &=& 1 \end{array} \qquad (4)\quad \begin{array}{rcccl} s_4(3) &=& a_4 \cdot 9 + b_4 \cdot 3 + c_4 &=& 2 \\ s_4(4) &=& a_4 \cdot 16 + b_4 \cdot 4 + c_4 &=& 0 \end{array}$$

Es gibt mehr als nur eine Lösung für jedes Funktionsstück bzw. für den Spline. Insgesamt liegen $3 \cdot 4 = 12$ Unbekannte vor, aber nur 8 Gleichungen.

Bedingungen	Beschreibung		Anzahl
$s_i(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, 4$	Interpolationsbedingungen	(*links*)	4
$s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, 4$		(*rechts*)	4

Eine mögliche Lösung ist gegeben durch

$$s(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{für} \quad x \in [0,1] \\ -x^2 + x + 3 & \text{für} \quad x \in [1,2] \\ x^2 - 4x + 5 & \text{für} \quad x \in [2,3] \\ -x^2 + 5x - 4 & \text{für} \quad x \in [3,4] \end{cases}.$$



Wir haben jetzt auch keine Verbesserung an den Stützstellen erreicht, denn dort sind immer noch die Knicke deutlich zu erkennen, da wir nur gefordert haben, dass der Spline in den Stützstellen interpoliert.

5.2 Berücksichtung der ersten Ableitung

Um eine knicklos verbundene Kurve zu erhalten, müssen wir zusätzlich die erste Ableitung einbeziehen und fordern, dass sie für die einzelnen Splineabschnitte in den Stützstellen übereinstimmt, $s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$, und in den Randpunkten z. B. 0 ist, also $s_1'(0) = 0 = s_4'(4)$. Damit fordern wir einen ebenen Einstieg für die Passagiere und die Knicke in den Stützstellen verschwinden. Wir erhalten also einen fließenden Übergang. Leider erhalten wir dadurch zuviele Bedingungen, in unserem Beispiel 13 Bedingungen für 4 mal 3 Unbekannte.

Bedingungen	Beschreibung		Anzahl
$s_i(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, 4$	Interpolationsbedingungen	(*links*)	4
$s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, 4$		(*rechts*)	4
$s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i), \quad i = 2, \ldots, 4$	Stetigkeit der 1. Ableitung an inneren Knoten		3
$s_1'(x_1) = 0$	Randbedingungen	(*links*)	2
$s_4'(x_5) = 0$		(*rechts*)	

Wir müssen auf eine Bedingung verzichten. Es macht kaum Sinn, eine Bedingung für die Stützstellen wegzulassen oder eine Bedingung, die die Knicke verhindert. D. h. dass wir nur auf eine Forderung an die Ableitungen in den Randpunkten verzichten müssen. Lassen wir z. B. die letzte Randbedingungen $s_4'(4) = 0$ weg, so müssen wir die Gleichungssysteme

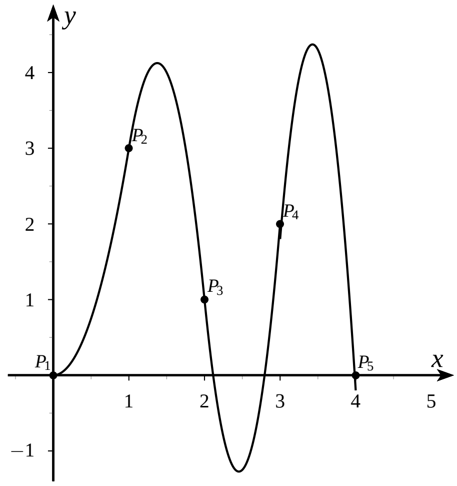
$$
(1)\quad \begin{aligned} s_1(0) &= a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 = 0 \\ s_1(1) &= a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 1 + c_1 = 3 \\ s_1'(0) &= 2a_1 \cdot 0 + b_1 = 0 \end{aligned}
\qquad
(3)\quad \begin{aligned} s_3(2) &= a_3 \cdot 4 + b_3 \cdot 2 + c_3 = 1 \\ s_3(3) &= a_3 \cdot 9 + b_3 \cdot 3 + c_3 = 2 \\ s_3'(2) &= 2a_3 \cdot 2 + b_3 = s_2'(2) \end{aligned}
$$

$$
(2)\quad \begin{aligned} s_2(1) &= a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot 1 + c_2 = 3 \\ s_2(2) &= a_2 \cdot 4 + b_2 \cdot 2 + c_2 = 1 \\ s_2'(1) &= 2a_2 \cdot 1 + b_2 = s_1'(1) \end{aligned}
\qquad
(4)\quad \begin{aligned} s_4(3) &= a_4 \cdot 9 + b_4 \cdot 3 + c_4 = 2 \\ s_4(4) &= a_4 \cdot 16 + b_4 \cdot 4 + c_4 = 0 \\ s_4'(3) &= 2a_4 \cdot 3 + b_4 = s_3'(3) \end{aligned}
$$

lösen. Dies geht nacheinander. Mithilfe des ersten Gleichungssystems können wir s_1 eindeutig bestimmen und damit dann das zweite Gleichungssystem lösen, dessen letzte Gleichung von s_1 abhängt. So erhalten wir s_2 und in ähnlicherweise s_3 und s_4.

Wir haben nun 12 Gleichungen und 12 Unbekannte. Dies ergibt den folgenden Spline

$$
s(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \in [0,1] \\ -8x^2 + 22x - 11 & \text{für } x \in [1,2] \\ 11x^2 - 54x + 65 & \text{für } x \in [2,3] \\ -14x^2 + 96x - 160 & \text{für } x \in [3,4] \end{cases},
$$



Wir können gut erkennen, dass der Verlauf der Funktion mit hohen Steigungen verbunden ist. Die Ausschläge der Funktion sind sehr groß. Es ist fraglich, ob man so eine Achterbahn ohne gesundheitliche Risiken befahren kann.

Mit dieser Methode haben wir wieder die Kontrolle über den Verlauf der Achterbahn verloren. Hinzu kommt, dass wir den Spline ohne die Randbedingung im Punkt P_5 berechnen mussten, sonst hätten wir eine Gleichung zuviel gehabt, d. h. wir mussten auf einen ebenen Einstieg der Passagiere verzichten.

5.3 Ein alternativer Ansatz

Eine andere Idee ist es, dass der quadratische Spline für andere Anfangs- und Endpunkte berechnet wird, d. h. wir sehen davon ab, dass ein Spline zwischen zwei Stützstellen interpoliert, und legen stattdessen fest, dass ein Spline durch eine Stützstelle läuft und die Ableitung am Mittelpunkt des Intervalls mit dem vorherigen bzw. nächsten Spline übereinstimmt. Wir suchen also einen Spline $s(x)$ mit der Darstellung

$$
s(x) = \begin{cases} s_1(x) & \text{für } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ s_2(x) & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \\ s_3(x) & \text{für } x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] \\ s_4(x) & \text{für } x \in \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right] \\ s_5(x) & \text{für } x \in \left[\frac{7}{2}, 4\right] \end{cases}.
$$

Das hat den Effekt, dass die Extremstellen in der Nähe der Stützstellen liegen und keine unnötig hohen Ausschläge zu erwarten sind. Für 5 Punkte werden daher 5 Abschnitte benötigt. Für die Bedingung am Rand fordern wir wieder, dass die Ableitung 0 wird.

Bedingungen	Beschreibung		Anzahl
$s_i(x_i) = y_i \quad i = 1, \dots, 5$	Interpolationsbedingungen		5
$s_i\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) = s_{i+1}\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right), \quad i = 1, \dots, 4$	Stetigkeit an inneren Knoten		4
$s_i'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) = s_{i+1}'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right), \quad i = 1, \dots, 4$	Stetigkeit der Ableitung an inneren Knoten		4
$s_1'(x_1) = 0$ $s_5'(x_5) = 0$	Randbedingungen	(*links*) (*rechts*)	2

Wir erhalten ein Gleichungssystem mit insgesamt 15 Gleichungen und 15 Unbekannten. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass wir auf keine Randbedingung verzichten müssen, aber den Nachteil, ein großes Gleichungssystem lösen zu müssen.

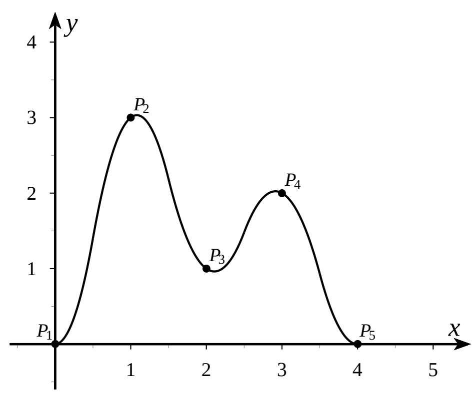
$$
\begin{aligned}
s_1(0) &= b_1 &&= 0\\
s_1'(0) &= c_1 &&= 0\\
s_1\left(\tfrac{1}{2}\right) - s_2\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{1}{4}a_1 + \tfrac{1}{2}b_1 + c_1 - \tfrac{1}{4}a_2 - \tfrac{1}{2}b_2 - c_2 &&= 0\\
s_1'\left(\tfrac{1}{2}\right) - s_2'\left(\tfrac{1}{2}\right) &= a_1 + b_1 - a_2 - b_2 &&= 0\\
s_2(1) &= a_2 + b_2 + c_2 &&= 3\\
s_2\left(\tfrac{3}{2}\right) - s_3\left(\tfrac{3}{2}\right) &= \tfrac{9}{4}a_2 + \tfrac{3}{2}b_2 - \tfrac{9}{4}a_3 - \tfrac{3}{2}b_3 &&= 0\\
s_2'\left(\tfrac{3}{2}\right) - s_3'\left(\tfrac{3}{2}\right) &= 3a_2 + b_2 - 3a_3 - b_3 &&= 0\\
s_3(2) &= 4a_3 + 2b_3 + c_3 &&= 1\\
s_3\left(\tfrac{5}{2}\right) - s_4\left(\tfrac{5}{2}\right) &= \tfrac{25}{4}a_3 + \tfrac{5}{2}b_3 + c_3 - \tfrac{25}{4}a_4 - \tfrac{5}{2}b_4 - c_4 &&= 0\\
s_3'\left(\tfrac{5}{2}\right) - s_4'\left(\tfrac{5}{2}\right) &= 5a_3 + b_3 - 5a_4 - b_4 &&= 0\\
s_4(3) &= 9a_4 + 3b_4 + c_4 &&= 2\\
s_4\left(\tfrac{7}{2}\right) - s_5\left(\tfrac{7}{2}\right) &= \tfrac{49}{4}a_4 + \tfrac{7}{2}b_4 + c_4 - \tfrac{49}{4}a_5 - \tfrac{7}{2}b_5 - c_5 &&= 0\\
s_4'\left(\tfrac{7}{2}\right) - s_5'\left(\tfrac{7}{2}\right) &= 7a_4 + b_4 - 7a_5 - b_5 &&= 0\\
s_5(4) &= 16a_5 + 4b_5 + c_5 &&= 0\\
s_5'(4) &= 8a_5 + b_5 &&= 0
\end{aligned}
$$

Unser Spline ist in unserem Beispiel durch

$$
s(x) = \begin{cases}
\frac{286}{51}x^2 & \text{für} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\\
-\frac{82}{17}x^2 + \frac{532}{51}x - \frac{133}{51} & \text{für} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\\
\frac{10}{3}x^2 - \frac{716}{51}x + \frac{803}{51} & \text{für} \quad x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]\\
-\frac{54}{17}x^2 + \frac{944}{51}x - \frac{424}{17} & \text{für} \quad x \in \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]\\
\frac{190}{51}x^2 - \frac{1520}{51}x + \frac{3040}{51} & \text{für} \quad x \in \left[\frac{7}{2}, 4\right]
\end{cases} \tag{1}
$$

gegeben.

Wie wir in der nebenstehenden Abbildung sehen, ist s knickfrei und erfüllt sämtliche Bedingungen an den Punkten P_i für $i = 1, \dots, 5$. Es gibt allerdings ein Problem, was uns kaum auffallen mag, wenn wir das Bild betrachten. Die zweite Ableitung muss nach unserer Berechnung nicht stetig in allen Punkten sein. Nun ist die zweite Ableitung eine wichtige Größe zur Berechnung der Beschleunigung. Eine Achterbahn, die einen kontinuierlichen Verlauf der Beschleunigung nicht beachtet, wird möglicherweise zu Verletzungen der Wirbelsäule führen.



Betrachtet man die zweite Ableitung für s_1 und s_2, so ergibt sich, $s_1''(x) = \frac{286}{51} \cdot 2 \approx 11.21$ und $s_2''(x) = -\frac{82}{17} \cdot 2 \approx -9,65$. Der Übergang ist noch immer nicht sanft genug, um eine sichere Fahrt zu gewährleisten. Das Vorzeichen gibt hierbei nur an, ob die Funktion rechts- oder linksgekrümmt ist. Um die zweite Ableitung und deren Werte zu beeinflussen, genügen uns die quadratischen Splines nicht mehr. Wir wählen im nächsten Schritt einen anderen Ansatz und erhöhen den Grad unserer Splines.

6. Kubische Splines

Wir beschäftigen uns nun mit kubischen Splines, bestehend aus Polynomen dritten Grades, die in den Stützstellen interpolieren. Wir benötigen 4 Funktionenstücke, um eine Bahn durch unsere vorgegebenen Punkte zu legen. Unsere Streckenabschnitte sollen nun durch die Polynome

$$s_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

gegeben sein. Um die Stetigkeit der ersten und zweiten Ableitung zu fordern, müssen die Splines in der ersten und zweiten Ableitung übereinstimmen. Es muss

$$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}) \text{ und } s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1})$$

gelten. Für unser Beispiel für $i = 1,2,3$, also an den inneren Punkten P_2, P_3 und P_4. Eine geeignete Randbedingung ist in unserem Fall wieder, dass die erste Ableitung in den Randpunkten verschwindet. Hier also

$$s_1'(0) = 0 \text{ und } s_4'(4) = 0.$$

Man sagt auch, dass der Spline am Rand eingespannt wird.

Bedingungen	**Beschreibung**		**Anzahl**
$s_i(x_i) = y_i, \quad i = 1,\dots,4$	Interpolationsbedingungen	(*links*)	4
$s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 1,\dots,4$		(*rechts*)	4
$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i = 1,\dots,3$	Stetigkeit der 1. Ableitung an inneren Knoten		3
$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}), \quad i = 1,\dots,3$	Stetigkeit der 2. Ableitung an inneren Knoten		3
$s_1'(x_1) = 0$	Randbedingungen	(*links*)	2
$s_4'(x_5) = 0$		(*rechts*)	

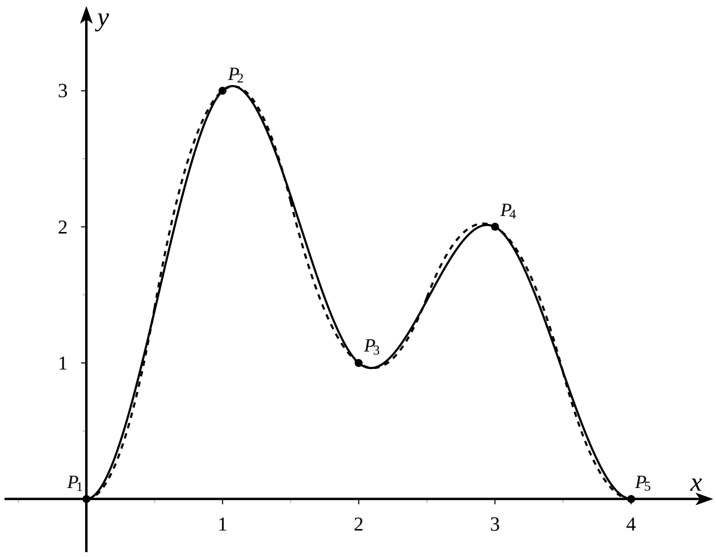
Wir erhalten insgesamt 16 Gleichungen in einem Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rlllllllllllll}
s_1(0) = & & & & d_1 & & & & & & & & & = 0 \\
s_1'(0) = & & & c_1 & & & & & & & & & & = 0 \\
s_1(1) = & a_1 & +b_1 & +c_1 & +d_1 & & & & & & & & & = 3 \\
s_1'(1) - s_2'(1) = & 3a_1 & +2b_1 & +c_1 & & -3a_2 & -2b_2 & -c_2 & & & & & & = 0 \\
s_1''(1) - s_2''(1) = & 6a_1 & +2b_1 & & & -6a_2 & -2b_2 & & & & & & & = 0 \\
s_2(1) = & & & & & a_2 & +b_2 & +c_2 & +d_2 & & & & & = 3 \\
s_2(2) = & & & & & 8a_2 & +4b_2 & +2c_2 & +d_2 & & & & & = 1 \\
s_2'(2) - s_3'(2) = & & & & & 12a_2 & +4b_2 & +c_2 & & -12a_3 & -4b_3 & -c_3 & & = 0 \\
s_2''(2) - s_3''(2) = & & & & & 12a_2 & +2b_2 & & & -12a_3 & -2b_3 & & & = 0 \\
s_3(2) = & & & & & & & & & 8a_3 & +4b_3 & +2c_3 & +d_3 & = 1 \\
s_3(3) = & & & & & & & & & 27a_3 & +9b_3 & +3c_3 & +d_3 & = 2 \\
s_3'(3) - s_4'(3) = & & & & & & & & & 27a_3 & +6b_3 & +c_3 & & -27a_4 \; -6b_4 \; -c_4 = 0 \\
s_3''(3) - s_4''(3) = & & & & & & & & & 18a_3 & +2b_3 & & & -18a_4 \; -2b_4 = 0 \\
s_4(3) = & & & & & & & & & & & & & 27a_4 \; +9b_4 \; +3c_4 \; +d_4 = 2 \\
s_4(4) = & & & & & & & & & & & & & 64a_4 \; +16b_4 \; +4c_4 \; +d_4 = 0 \\
s_4'(4) = & & & & & & & & & & & & & 48a_4 \; +8b_4 \; +c_4 = 0
\end{array}$$

Wir werden in Aufgabe 7.3 sehen, dass es auch möglich ist, den Rechenaufwand geringer zu gestalten, in dem man eine andere Darstellung des Polynoms wählt. Der nun eindeutige Spline lautet hier:

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{141}{28}x^3 + \frac{225}{28}x^2 & \text{für} \quad x \in [0,1] \\ \frac{115}{28}x^3 - \frac{543}{28}x^2 + \frac{192}{7}x - \frac{64}{7} & \text{für} \quad x \in [1,2] \\ -\frac{95}{28}x^3 + \frac{717}{28}x^2 - \frac{438}{7}x + \frac{356}{7} & \text{für} \quad x \in [2,3] \\ \frac{97}{28}x^3 - \frac{1011}{28}x^2 + \frac{858}{7}x - \frac{940}{7} & \text{für} \quad x \in [3,4] \end{cases}$$

Vergleichen wir nun den quadratischen Spline aus (1), so zeigt die nachfolgende Abbildung, dass ein Unterschied zu unserem kubischen Spline erst bei näherem Betrachten erkennbar ist. Wir sehen, dass der quadratische Spline (gestrichelte Linie) tatsächlich eine höhere Krümmung aufweist als der kubische Spline. Es erscheint nicht sehr viel, aber mit einem geringem Rechenaufwand von nur einer zusätzlichen Gleichung in unserem Gleichungssystem, haben wir die Stetigkeit in der zweiten Ableitung gewonnen. Für alle Anwendungen, wo die Beschleunigung eine Rolle spielt, ist dies von Vorteil.



6.1 Kubisches Splines durch n Punkte

Haben wir n Punkte $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ mit $P_i = (x_i|y_i)$, wobei $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, gegeben und wollen wir durch diese Punkte einen kubischen Spline legen, d. h. wir berechnen $n-1$ Polynome dritten Grades, so müssen wir die folgenden Bedingungen erfüllen:

Bedingungen	**Beschreibung**		**Anzahl**
$s_i(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n-1$	Interpolationsbedingungen	(*links*)	$n-1$
$s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1$		(*rechts*)	$n-1$
$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n-2$	Stetigkeit der 1. Ableitung an inneren Knoten		$n-2$
$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n-2$	Stetigkeit der 2. Ableitung an inneren Knoten		$n-2$
$s_1'(x_1) = 0$	Randbedingungen	(*links*)	2
$s_{n-1}'(x_n) = 0$		(*rechts*)	

Diese Bedingungen führen immer auf ein eindeutig lösbares Gleichungssystem mit insgesamt $4 \cdot (n-1)$ Gleichungen und Unbekannten.

7. Aufgaben

7.1 Aufgabe – Rutsche

Auf einem Spielplatz soll eine Rutsche gebaut werden. Sie soll etwa 3 Meter hoch sein und auf dem Boden 2 Meter einnehmen. Es sollen also die Punkte durch ein geeignetes Verfahren interpoliert werden. Welches Verfahren

x_i	0	2
y_i	3	0

würdest du wählen? Welche Randbedingungen sollten für die Rutsche gewählt werden?

Lösung zu 7.1: Wir wählen das Verfahren der Polynominterpolation. An beiden Randpunkten soll die Ableitung verschwinden. Das sorgt für einen ebenen Einstieg und Abstieg von der Rutsche. Wir suchen ein Polynom $p(x)$, das vier Bedingungen erfüllt. Somit suchen wir ein Polynom dritten Grades der Form

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

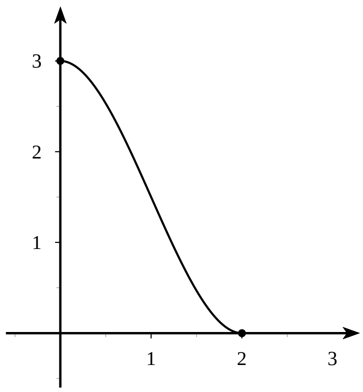
Durch Ausnutzen der Bedingungen erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} d &= 3 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 1 \\ c \quad &= 0 \\ 12a + 4b \quad &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung $a = \frac{3}{4}$, $b = -\frac{9}{4}$, $c = 0$ und $d = 3$. Die Funktion für unsere Rutsche ist gegeben durch

$$p(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 3.$$

Bedingungen	**Beschreibung**
$p(0) = 3$, $p(2) = 0$	Interpolationsbedingungen
$p'(0) = 0$, $p'(2) = 0$	Randbedingungen



7.2 Aufgabe – kurze Berg-und Talfahrt

Vorgegeben sind die Punkte:

x_i	0	1	2
y_i	0	1	0

Berechne unter der Berücksichtigung geeigneter Randbedingungen, die du selbst vorgibst

a) das Interpolationspolynom und

b) den kubischen Spline.

Lösung zu 7.2 a): Zunächst berechnen wir das Interpolationspolynom $p(x)$. Um bequem ein und auszusteigen, sollte die Achterbahn am Anfangs- und Endpunkt parallel zur Erde verlaufen, also eben liegen. Dies ist eine Bedingung an die erste Ableitung in den Randpunkten. Es muss daher $p'(0) = 0$ und $p'(2) = 0$ gelten. Zusammen mit den 3 Interpolationsbedingungen $p(0) = 0,\ p(1) = 1$ und $p(2) = 0$ haben wir 5 Bedingungen an unser Polynom. Wir suchen daher ein Polynom 4. Grades der Form

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

mit den noch unbekannten 5 Koeffizienten $a_0, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}$. Es gilt

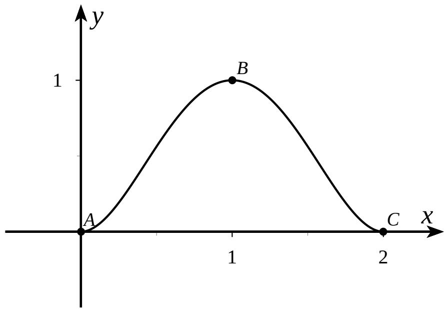
$$p'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1.$$

Setzen wir unsere Interpolationsbedingungen und Anfangsbedingungen ein, so erhalten wir das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrl} & & & & a_0 & = 0 \\ a_4 & + \; a_3 & + \; a_2 & + \; a_1 & + a_0 & = 1 \\ 16a_4 & + 8a_3 & + 4a_2 & + 2a_1 & + a_0 & = 0 \\ & & & a_1 & & = 0 \\ 32a_4 & + 12a_3 & + 4a_2 & + \; a_1 & & = 0 \end{array}$$

mit der Lösung $a_4 = 1,\ a_3 = -4$ und $a_2 = 4$. Dies ergibt die Darstellung des Interpolationspolynoms

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2.$$



Lösung zu 7.2 b): Für die Lösung werden zwei Funktionenstücke benötigt. Diese benennen wir mit $s_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$ für das Intervall $[0,1]$ und $s_2(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2$ für das Intervall $[1,2]$. Die Randbedingung übernehmen wir aus Aufgabenteil a).

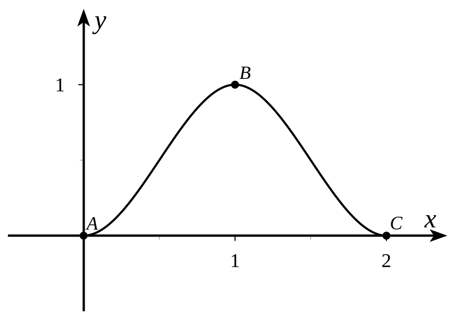
Bedingungen	**Beschreibung**
$s_1(0) = 0$	Interpolationsbedingungen
$s_1(1) = 1$	
$s_2(1) = 1$	
$s_2(2) = 0$	
$s_1'(1) = s_2'(1)$	Stetigkeit der 1. Ableitung am inneren Knoten
$s_1''(1) = s_2''(1)$	Stetigkeit der 2. Ableitung am inneren Knoten
$s_1'(0) = 0$	Randbedingungen
$s_2'(2) = 0$	

Dies führt auf das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrrrrl} & & & d_1 & & & & & = 0 \\ a_1 & + b_1 & + c_1 & + d_1 & & & & & = 1 \\ & & c_1 & & & & & & = 0 \\ & & & & a_2 & + \; b_2 & + \; c_2 & + d_2 & = 0 \\ & & & & 8a_2 & + 4b_2 & + 2c_2 & + d_2 & = 0 \\ & & & & 12a_2 & + 4b_2 & + \; c_2 & & = 0 \\ 3a_1 & + 2b_1 & + c_1 & & -3a_2 & - 2b_2 & - \; c_2 & & = 0 \\ 6a_1 & + 2b_1 & & & -6a_2 & - 2b_2 & & & = 0 \end{array}$$

mit der Lösung $a_1 = -2, b_1 = 3, c_1 = 0 = d_1, a_2 = 2, b_2 = -9, c_2 = 12$ und $d_2 = -4$. Der Spline ist daher gegeben durch

$$s(x) = \begin{cases} -2x^3 + 3x^2 & \text{für} \quad x \in [0,1] \\ 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 & \text{für} \quad x \in [1,2] \end{cases}. \tag{2}$$



7.3 Aufgabe – Symmetrie

Wir berechnen den kubischen Spline aus der obigen Aufgabe noch einmal mit einem anderen Ansatz. Betrachtet man die Zeichnung der obigen Lösung, so fällt sofort eine Achsensymmetrie bzgl. einer um 1 auf der x-Achse nach rechts verschobenen y-Achse auf. Wir wollen diese Eigentschaft nun ausnutzen. Wir nehmen an, dass das erste Teilstück unseres Splines im Intervall $[0,1]$ die Darstellung

$$s_1(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

hat, und dass $s_2(x)$ im Intervall $[1,2]$ aufgrund der Symmetrie die Darstellung

$$s_2(x) = s_1(2-x) = a_3(2-x)^3 + a_2(2-x)^2 + a_1(2-x) + a_0$$

hat. Berechne nun mit diesem Ansatz erneut den kubischen Spline, indem du das zu lösende Gleichungssystem geeignet aufstellst.

Lösung zu 7.3: Durch die Verwendung dieses Ansatzes müssen wir lediglich 4 Unbekannte a_3, a_2, a_1, a_0 berechnen. Wir werden sehen, dass wir auch nur 4 Bedingungen erhalten. Zunächst müssen die Interpolationsbedingungen erfüllt sein, also $s_1(0) = 0, s_1(1) = 1$ und $s_2(2) = 0$. Es gilt mit unserem Symmetrieansatz, dass

$$s_2(2) = s_1(2-2) = s_1(0) = 0.$$

Wir konnten somit die Anzahl unserer Interpolationsbedingungen von 3 auf 2 reduzieren. Für die Ableitungen am inneren Knoten muss $s_1'(1) = s_2'(1)$ und $s_1''(1) = s_2''(1)$ gelten. Wir wollen ausnutzen, dass $s_2(x) = s_1(2-x)$. Dazu müssen wir die Ableitung von s_2 berechnen. Wir definieren dazu die Funktion $f(x) = 2-x$, um die Kettenregel anwenden zu können. Es gilt

$$s_2'(x) = (s_1(f(x)))' = s_1'(f(x)) \cdot f'(x) = s_1'(2-x) \cdot (-1).$$

Damit erhalten wir

$$s_1'(1) = s_2'(1) = -s_1'(1).$$

Umstellen liefert $s_1'(1) = 0$. Wir fordern also im Punkt $(1,1)$ eine waagerechte Tangente. Das hätten wir auch aus der Symmetrieeigenschaft schließen können. Analog gehen wir für die zweite Ableitung vor:

$$s_2''(x) = (s_1(f(x)))'' = (s_1'(f(x)) \cdot f'(x))' = s_1''(f(x)) \cdot f'(x)^2 + s_1'(f(x)) \cdot f''(x) = s_1''(2-x).$$

Damit wird die Bedingung $s_1''(1) = s_2''(1) = s_1''(1)$ überflüssig, weil wir aus ihr keine Informationen erhalten. Für die Randbedingungen muss gelten $s_1'(0) = 0$ und $s_2'(2) = s_1'(0) = 0$. Auch hier haben wir die Anzahl der Bedingungen reduziert. Es bleiben:

Bedingungen	**Beschreibung**
$s_1(0) = 0$ $s_1(1) = 1$	Interpolationsbedingungen
$s_1'(1) = 0$	Bedingung am inneren Knoten
$s_1'(0) = 0$	Randbedingung

Dies führt auf das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} d_1 &= 0 \\ c_1 \quad &= 0 \\ a_1 + b_1 + c_1 + d_1 &= 1 \\ 3a_1 + 2b_1 + c_1 \quad &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung $a_1 = -2, b_1 = 3, c_1 = 0 = d_1$. Wir erhalten somit unseren Spline

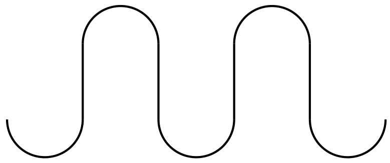
$$s(x) = \begin{cases} -2x^3 + 3x^2 & \text{für} \quad x \in [0,1] \\ 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 & \text{für} \quad x \in [1,2] \end{cases}.$$

Dieser ist identisch mit dem Spline (2).

8. Schlussbemerkung

Diese kurze Einführung hat vielleicht erahnen lassen, wie aufwändig es ist, eine Achterbahn zu konstruieren und dass gerade die Freiheit der Konstruktion durch die Grenzen der menschlichen Belastbarkeit beschränkt wird. Natürlich ist man auch mit der Stetigkeit der zweiten Ableitung, wie wir sie bei den kubischen Splines vorfinden, noch längst nicht zufrieden. Dies bedeutet nämlich, dass sich die Beschleunigung immer noch ruckartig ändern kann.Wer schon einmal mit einer *Wilden Maus*-Achterbahn gefahren ist, wird es erlebt haben, wie man in den Kurven herumgeschleudert werden kann, wenn sich die zweite Ableitung und das heißt auch die Krümmung plötzlich ändern darf. Dort gibt es Teilstrecken, die parallel zum Boden verlaufen.

In den Kurven ist der Verlauf der Bahn halbkreisförmig (siehe die rechtsstehende Abbildung). Bei der Ein- und Ausfahrt in bzw. aus dem Halbkreis wird man herumgeschleudert. Dort ändert sich die Krümmung ruckartig. Eine Abhilfe schafft hier das Berücksichtigen weiterer Ableitungen. Diese Probleme ergeben sich auch im Straßenbau. Man benutzt hier und beim Bau von Achterbahnen besondere Kurven, sogenannte Klothoiden (siehe dazu [3]).



Literatur

Deufelhard P., Hohmann A.	[1]:	Numerische Mathematik 1, de Gruyter, Berlin 2008
Hanke-Bourgeois M.	[2]:	Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens, Vieweg Teubner, Wiesbaden 2009
Walser, H.	[3]:	Die Modellierung des schönen Scheins, MI Nr. 55, 2011 (S.3-14), 2011
Baumann, A.	[4]:	Eine kritische Betrachtung zum Thema „Modellierungsaufgaben“ anhand von Beispielen aus dem hessischen Mathematik-Abitur 2009, MI Nr. 55, 2011, (S.15-23)
Meyer, Kh.	[5]:	Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht 1, Algebra und Geometrie, Hirschgraben Frankfurt/Main, 1980, 316 Seiten

Anschrift der Autorin:
Evelyn Schirmer
Institut für Naturwissenschaften
Hochschule Ruhr West
Dümptenerstraße 45
45476 Mülheim
Email: evelyn.schirmer@hs-ruhrwest.de

Eingereicht und angenommen am 7. Mai 2013