Karlhorst Meyer

Geometrie in der Mathematik-Olympiade

Der Autor hat bereits in seiner Abhandlung [7] „Beweisideen in der Geometrie“ (Mathematikinformation Nr. 55) u. a. auf die Problematik der Geometrieaufgaben im Rahmen der Mathematik-Olympiaden hingewiesen, da er glaubt, dass hier durchaus eine Weiterentwicklung möglich ist. Im Folgenden geht es abermals vor allem darum, dass allein der Weitblick, das Geschick des Beweise-Schreibens bei einem Prüfling nicht für die gestellten Aufgaben ausreichen, die Probleme zu lösen, wenn nicht ein gezielter Ergänzungsunterricht das Normalcurriculum am Gymnasium und adäquaten Schulen die MO begleiten. Hier sollte man endlich die Karten auf den Tisch legen und sagen, welche Kenntnisse der Jugendliche haben sollte, damit sich zukünftig wieder alle Gymnasiasten der Prüfung zuwenden können und nicht nur diejenigen, die die Finanzen haben, sich zusätzlich Information bzw. Unterricht zu beschaffen.

Auch in der MO gilt die Geometrie als schwer, was weniger durch die gestellten Aufgaben als durch lückenhafte Lehrpläne verursacht wird. Bedauerlicherweise sind z. B. in der Bundesrunde der MO 2010 nur 6 Geometrieaufgaben bei 16 sonstigen zu finden sind. Das entspricht zwar den Hochschultendenzen, aber nicht dem Stellenwert der Geometrie weder im Unterricht noch in der Anwendung.

1. Tangenten an Kreise

Wir gehen davon aus, dass jeder Schüler die gegenseitige Lage einer Geraden zu einem Kreis kennt, also bezüglich eines Kreises zwischen meidenden, berührenden und schneidenden Geraden unterscheiden kann, dass er die Tangenten von einem Punkt außerhalb an einen Kreis legen aber auch konstruieren kann und bei Sehnen und Tangenten Symmetrien auszunutzen versteht.

> *Aufgabe 1*[1]*:* Skizziere alle möglichen Lagen von zwei Kreisen mit ihren (eventuellen) gemeinsamen Tangenten.

Konstruktion der gemeinsamen Tangenten an 2 Kreise

Grundidee:
Man kann Figuren aus Kreisen und Geraden um **eine Länge *r* schrumpfen oder aufblasen,** ohne dass sich ihr Schnittverhalten ändert. Hierbei werden die Geraden um *r* parallel verschoben und der Kreisradius um *r* vergrößert oder verkleinert. Man möge beachten, das gilt auch dann, wenn man einen Kreis um *r* schrumpfen lässt und einen anderen um *r* aufbläst.

Einen Beweis liefert die komplexe projektive Geometrie, die lehrt, dass bei den genannten Abbildungen die Fernpunkte erhalten bleiben.

Hierzu:
Ordnet man dem Punkt $(x \mid y)$ die projektiven Koordinaten $(x_0 \mid x_1 \mid x_2) \neq (0 \mid 0 \mid 0)$ mit $\frac{x_1}{x_0} = x$ und $\frac{x_2}{x_0} = y$ zu, so erhält man die Fernpunkte für $x_0 = 0$.
Der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ hat die projektive Gleichung $-x_0^2 r^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, seine Fernpunkte erhält man durch $x_1^2 + x_2^2 = 0$, weitere gibt es nicht. Nur wenn mindestens eine Koordinate x_1 oder x_2 komplex ist, erhält man eine Lösung. Man sagt, der Kreis hat 2 komplexe Fernpunkte, die unabhängig vom Radius *r* sind. Die Parallelverschiebung der Geraden ändert auch nichts an ihrem Fernpunktverhalten.

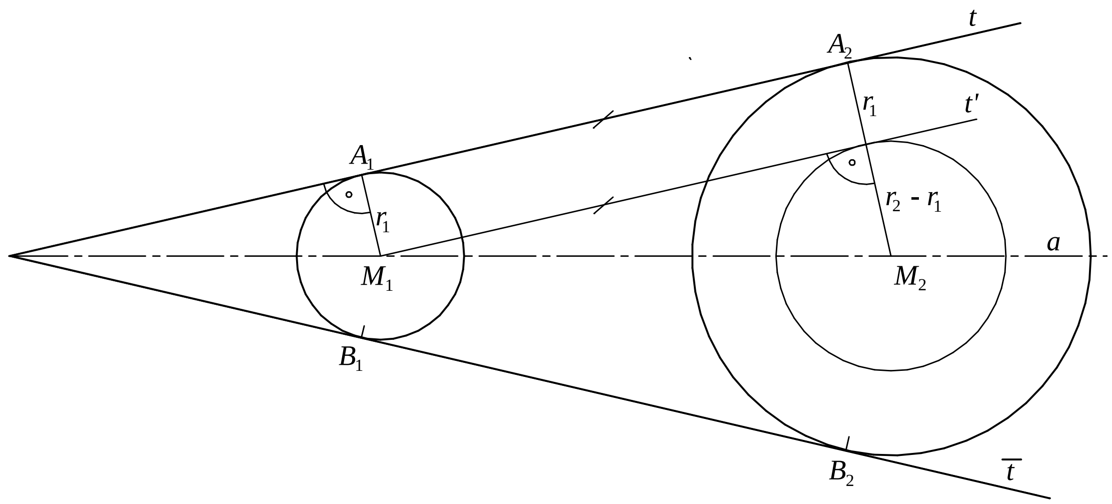
Diese Überlegung benötigt man zum Finden von Lösungsstrategien, nicht aber zur Begründung der Anwendung, da in jedem Einzelfall elementargeometrisch ein Beweis erstellt werden kann. Beim Folgenden wird dieser in beiden Fällen durch ein Rechteck, an dem die Tangente und die verschobene Gerade beteiligt sind, erbracht.

---

[1] Hier ungelöste Aufgaben haben ihre Lösungen in Kapitel 5.

Aufgabe 2: Was ändert sich am Fernpunktverhalten der Kreise, wenn man die Mittelpunkte verschiebt?

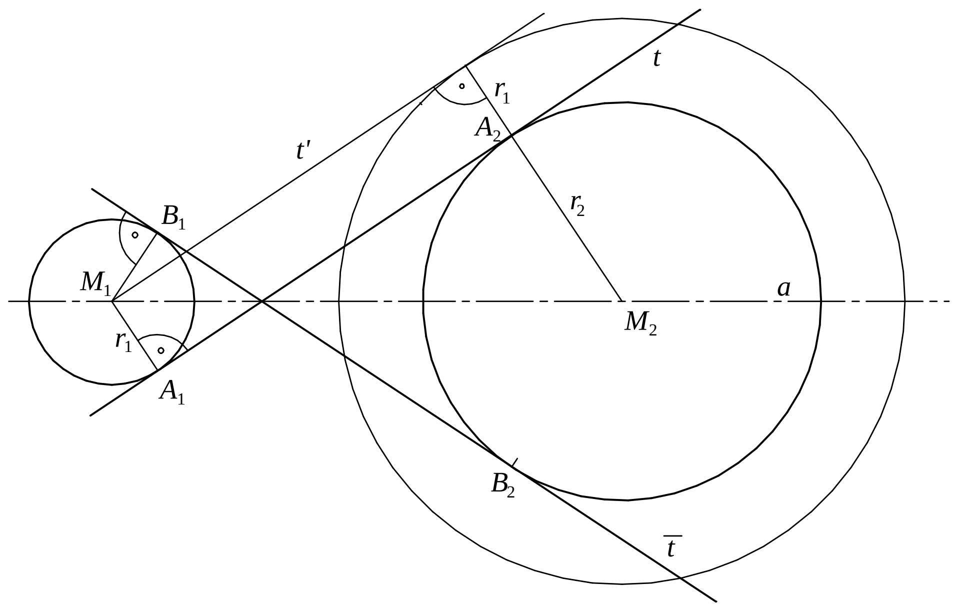
Fall 1: Die äußeren Tangenten zweier punkfremder Kreise
Man lässt den kleineren Kreis mit Radius r_1 zu einem Punkt schrumpfen, da man von einem Punkt aus die Tangenten an einen Kreis legen kann. Der größere Kreis schrumpft gleichzeitig zu einem Kreis mit Radius r_2 ! r_1. Nach Konstruktion der Tangenten von M_1 an letzteren Kreis wird wieder zur alten Konfiguration aufgeblasen und die Tangenten mitgenommen. Die zweite Tangente muss zur Zentralen M_1M_2 symmetrisch liegen.



Den Beweis findet man über das konstruierte Rechteck.

Korollar: In beiden Fällen gilt $|\overline{A_1A_2}| = |\overline{B_1B_2}|$.

Fall 2: Die inneren Tangenten zweier punktfremder Kreise
Hier lässt man den kleineren Kreis zu einem Punkt schrumpfen, während der größere Kreis aufgeblasen wird.

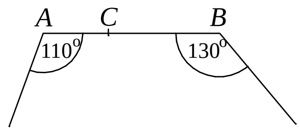


Aufgabe 3 (nach [4] Brennpunkt Geometrie 8, Seite 14): Ein Kreisbogen erhebt sich über einer Sehne der Länge 3,25 m um 0,50 m. Ermittle konstruktiv den Radius des Bogens im Maßstab 1:50 und berechne den Abstand des Kreismittelpunktes von der Sehne.

Aufgabe 4 (nach [4] Brennpunkt Geometrie 8, Seite 15): Ein „Riemenantrieb“ besteht aus einer treibenden Scheibe S_t und einer getriebenen Scheibe S_g. Der Radius der Antriebsscheibe beträgt $r_t = 6{,}0$ cm, der Achsenabstand 35,0 cm und das Übersetzungsverhältnis $r_t : r_g = 2 : 5$. Die Achsen liegen horizontal in derselben Höhe.

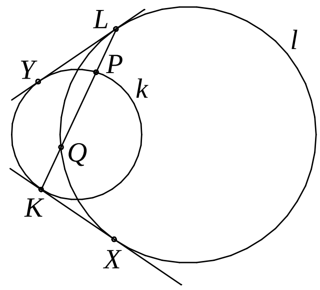
a) Konstruiere jeweils im Maßstab 1:10 den Riemenantrieb, wenn der Antrieb in gleicher Richtung, in Gegenrichtung erfolgen soll.
b) Berechne die Länge des Treibriemens in beiden Fällen.
c) Weshalb kann man nur eine Mindestlänge angeben? Welche weiteren Kenntnisse müsste man haben, um die Länge genau bestimmen zu können?

Aufgabe 5 (nach [4] Brennpunkt Geometrie 8): Ein Garten wird an den Ecken A und B durch Kreisbögen ausgerundet. Die Kreisbögen bezüglich A bzw. B setzen in C an. Es sind $|\overline{AC}|$ = 24,0 m und $|\overline{AB}|$ = 65,0 m.



a) Konstruiere die Ausrundung im Maßstab 1:2000.
b) Berechne die Radien der Ausrundungen.

Aufgabe 6 ([1] MO 491141): Man betrachte zwei Kreise k und l, die zwei Schnittpunkte haben mögen. Eine gemeinsame Tangente beider Kreise berühre k in K; ihre andere gemeinsame Tangente berühre l in L (vgl. die Zeichnung, in die bereits weitere Punkte für den Beweis eingezeichnet sind). Man beweise, dass die Gerade KL aus den Kreisen Sehnen derselben Länge herausschneidet.



Behauptung: $|\overline{LQ}| = |\overline{KP}|$

Vorüberlegung:
Es geht um gemeinsame Tangenten an zwei sich schneidende Kreise. Man erinnert sich an kennen gelernte Zusammenhänge, also was man über Kreise erfahren hat:

- Sehnenviereck und Sehnensatz samt Umkehrung,
- Tangentenviereck und Tangenten-Sekantensatz samt Umkehrung,
- Symmetrie,
- gleich lange Sehnen im Kreis,
- Satz des APOLLONIUS samt Umkehrung,
- Peripheriewinkelsatz (im Spezialfall THALESkreis) samt Umkehrungen.

Beweis zu Aufgabe 6:
KL ist Sekante und KX Tangente an den „größeren“ Kreis. LK ist Sekante und LY Tangente an den „kleineren“ Kreis. Wendet man hierauf jeweils den Tangenten-Sekantensatz an, so erhält man:
$|\overline{KX}|^2 = |\overline{KX}| \cdot |\overline{KL}|$ bzw. $|\overline{LY}|^2 = |\overline{LP}| \cdot |\overline{LK}|$
Da nach obigem Korollar $|\overline{KX}| = |\overline{LY}|$ gilt, folgt $|\overline{KQ}| \cdot |\overline{KL}| = |\overline{LP}| \cdot |\overline{LK}|$ und deshalb $|\overline{KX}| = |\overline{LP}|$. Addiert man auf beiden Seiten $|\overline{PQ}|$, so erhält man die Behauptung.

2. Weitere MO-Aufgaben

Nicht immer verlangen MO-Aufgaben so viele Kenntnisse, oft geht es nur darum, einen lückenlosen Beweis zu schreiben, wie etwa bei

Aufgabe 7 ([1] MO 490943): Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{DA}$ bezeichnen wir mit M bzw. N.

a) Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm ist, dann gilt $DM \mid\mid BN$ und $NC \mid\mid AM$.
b) Wenn $DM \mid\mid BN$ und NC $\mid\mid AM$ sind, dann ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Aufgabe 8 ([1] MO 491043): Es sei *ABCD* ein konvexes Viereck. Die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ bezeichnen wir mit *K, L, M* bzw. *N*. Man beweise:

c) Wenn *ABCD* ein Parallelogramm ist, dann gilt $BN \,||\, LD$ und $AM \,||\, KC$.

d) Wenn $BN \,||\, LD$ und $AM \,||\, KC$, dann ist *ABCD* ein Parallelogramm.

Aufgabe 9 ([1] MO 490844): Es sei *ABCD* ein Quadrat und *k* der Kreis um *A* durch *B*. Von einem Punkt *P* wird gefordert, dass er im Inneren dieses Quadrats und auf dem Kreis *k* liegt. Durch *P* sei die Tangente *t* an *k* gelegt. Der Fußpunkt des Lotes von *B* auf *t* sei mit *E* und der Fußpunkt des Lotes von *D* auf *t* sei mit *F* bezeichnet.
Beweise: Die Summe der Streckenlängen von $\overline{DF}$, $\overline{FE}$ und $\overline{EB}$ ist gleich dem halben Umfang des Quadrats *ABCD*.

Es gibt aber auch schwierigere Aufgaben, bei denen man Zusammenhänge erkennen muss, die zunächst nicht beschrieben sind. Hierbei kommen immer wieder Beispiele vor, die man elegant lösen kann, wenn man einen THALESkreis erkennt.

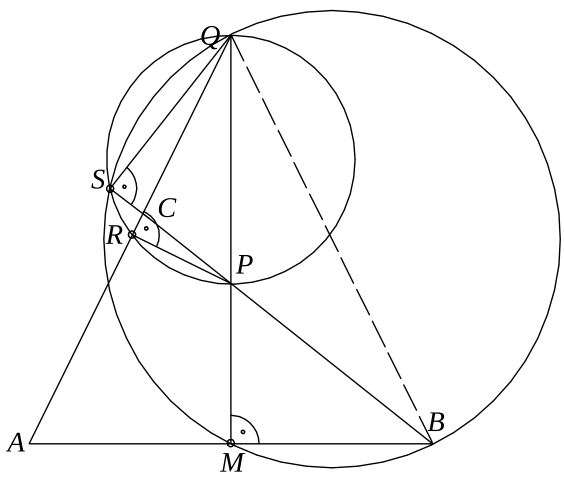
Man sollte deshalb grundsätzlich beim mehrfachen Lotefällen bzw. -errichten oder mehrfach gegebenen rechten Winkeln nachforschen, ob THALESkreise gefunden werden können (Analoges gilt für gleich große Winkel mit dem Peripheriewinkelsatz):

Aufgabe 10 ([1] MO 490945): Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck *ABC* mit $|\overline{BC}| > |\overline{CA}|$. Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ schneidet die Gerade *BC* in *P* und die Gerade *CA* in *Q*. *R* sei der Fußpunkt des Lotes von *P* auf *CA*, *S* Fußpunkt des Lotes von *Q* auf *BC*. *M* sei die Mitte von $\overline{AB}$.
Man zeige: *R*, *S* und *M* liegen auf einer Geraden.

Vorüberlegung: Man überlegt sich, wann drei Punkte, die in eine derartige Konfiguration eingebettet sind, auf einer Geraden liegen, z. B. wenn gilt: $\angle RSB = \angle MSB$

Man fertigt zunächst eine passende Figur. Dann denkt man an die rechten Winkel bei *R* und *S*, die nach Konstruktion auf THALES-Kreisen zu den Durchmessern $\overline{PQ}$ und $\overline{BQ}$ liegen.

Beweis:
$|\angle BSR| = |\angle RSP|$, weil *B, P, S* auf einer Geraden liegen.
$|\angle RSP| = |\angle RQP|$, weil *S* und *Q* auf dem Peripheriewinkelkreis über $\overline{RP}$ liegen.
$|\angle RQP| = |\angle MQB|$, weil *MQ* Mittelsenrechte ist.
$|\angle MQB| = |\angle MSB|$, weil *S* und *Q* auf einem Peripheriewinkelkreis über $\overline{MB}$ liegen.
Damit gilt $|\angle RSB| = |\angle MSB|$ und *S, R* und *B* liegen auf einer Geraden.



3. Hinzunahme weiterer Geometrie

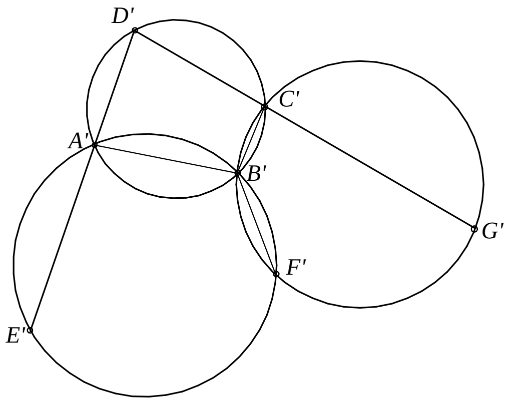
Die folgende Aufgabe lässt sich naheliegend lösen, wenn man die

- Kreistreue der Stereographischen Projektion kennt (siehe [6] Mathematikinformation Nr. 29).
- Die Aufgabe ist nichts anderes als der Schließungssatz von MIQUEL (siehe [5] Mathematikinformation Nr. 26).
- In beiden Fällen muss man zumindest wissen, dass jeder ebene, nicht leere Schnitt einer Kugel ein Kreis ist.

Es wäre interessant zu erfahren, ob es Kandidaten gab, die nachweisbar beide Theorien nicht kannten und dann elementargeometrisch das so genannte Lemma der Lösung finden konnten; denn man kann in beiden Theorien kaum Freihandzeichnungen ohne weiteres Wissen anfertigen, geschweige denn Konstruktionszeichnungen.

Aufgabe 11 ([1] MO nach 491146): Auf einer Kugel liegen die Punkte *A, B, C, D, E, F, G* und *H*, so dass *ABCD, ABFE, BCGF, CDHG* und *DAEH* jeweils eine Ebene bestimmen.
Man zeige: Dann liegen *E, F, G, H* auch auf einer Ebene.

Wissen: Die Anwendung der Stereographischen Projektion ist z. B. sinnvoll, wenn man durch die Projektion einige Kreise auf der Kugel in Geraden in der Projektionsebene verwandeln kann: Da alle Kugelkreise durch den Projektionspol zu solchen Geraden werden, geht es also bei der Aufgabe zunächst um Auswahl eines Punktes des gesuchten Sehnenvierecks als Pol; im Folgenden wird der Punkt *H* gewählt:



Beweis zur Aufgabe 11: Man macht eine stereographische Projektion von *H* auf die Tangentialebene durch den zu *H* liegenden diametralen Punkt. Die Bilder der Punkte *A, B…* auf der Kugel bei stereographischer Projektion von *H* auf diese Tangentialebene werden mit *A‘, B‘* ….. bezeichnet. Auf Grund der Kreistreue dieser Projektion sind die Bilder der bekannten 5 Schnittebenen mit der Kugel Kreise, wobei Geraden auch Kreise genannt werden. Die Ebenen durch *H* werden in der Bildebene zu Geraden *E’A’D‘* bzw. *G’C’D‘*. Die Bilder der 4 Punkte einer Schnittebene mit der Kugel liegen also jeweils auf einem Kreis und bilden deshalb ein Sehnenviereck. In der Bildebene ergibt sich obige Zeichnung. Die Punkte *E, F, G* und *H* liegen auf einem Kugelkreis, wenn die Punkte *E‘, F’* und *G‘* auf einer Geraden sind. Hierzu betrachtet man die gegebenen Sehnenvierecke in der Projektionsebene. Dann gilt:
$\angle B'F'G'$= 180° $-\angle B'C'G'$, weil diese Winkel im Sehnenviereck *F’G’C’B’* gegenüber liegen.
180° – $\angle B'C'G'$= $\angle B'C'D'$, weil *G’, C’, D‘* auf einer Geraden liegen.
$\angle B'C'D'$ = 180° $-\angle B'A'D'$, weil die Winkel im Sehnenviereck *A’B’C’D‘* gegenüber liegen.
180° $-\angle B'A'D'$ = $\angle B'A'E'$, weil *D‘, A‘, E‘* auf einer Geraden liegen.
$\angle B'A'E$ = 180° $-\angle B'F'E'$, weil die Winkel im Sehnenviereck *E‘, F‘, B‘, A‘* gegenüber liegen. Also gilt $\angle B'F'G'$ = 180° $-\angle B'F'E'$ und *E‘, F‘ und G‘* liegen auf einer Geraden. Deshalb gilt nach Obigem *E, F, G* und *H* liegen auf einem Kugelkreis.

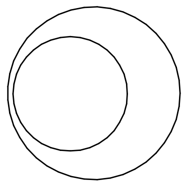
Wie oben gezeigt wird, handelt es sich um Dinge, die begabten Schülerinnen und Schülern in angemessener Zeit gelehrt werden könnten. Man erwartet seitens des MO-Vereins ja auch z. B. im Bereich Algebra Zusatzunterricht im Kongruenzrechnen, in der Polynomdivision, Zahlentheorie u. v. m.

Freilich, da ist noch ein anderes Problem. Lehrerinnen und Lehrer vermissen in den MO-Aufgaben den Stoff der bundesdeutschen Lehrpläne ab Klasse 10. Einmal fällt es den 18-Jährigen schwer, sich über Dinge prüfen zu lassen, die drei Jahre oder länger zurückliegen. Zum anderen würden sie sich freuen, wenn auch Inhalte gefragt werden, die sie in diesen drei Jahren gelernt haben. Um im Bereich Geometrie zu bleiben handelt es sich hierbei vor allem um die Koordinatengeometrie, Vektorgeometrie, Trigonometrie u. ä. Man kann auch nicht weiterhin behaupten, dies läge vor allem an der IMO, da sich mittlerweile viele Nationen den Lehrplänen Mitteleuropas angepasst haben.

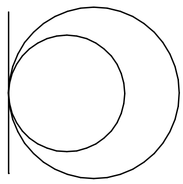
4. Lösungen

Falls es sich im Folgenden um Aufgaben der Mathematik-Olympiade 2009 handelt, findet man Lösungen in Anlehnung an die Musterlösungen der MO. Die Musterlösungen der MO geben häufig Parallellösungen, auf die hier nicht eingegangen wird.

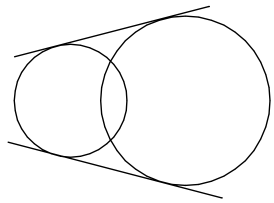
Zu Aufgabe 1:



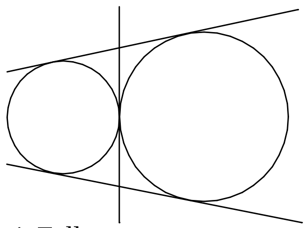
1. Fall:
Keine gemeinsame Tangente



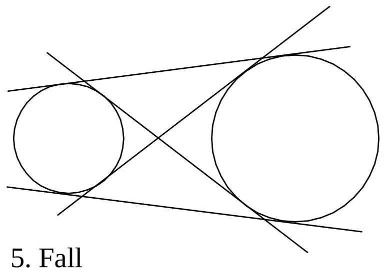
2. Fall:
Genau eine gemeinsame Tangente



3. Fall
Genau zwei gemeinsame Tangenten



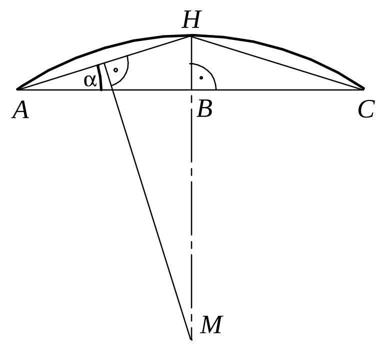
4. Fall
Genau drei gemeinsame Tangenten



5. Fall
Genau vier gemeinsame Tangenten

Zu Aufgabe 2:
Verschiebt man $(0\,|\,0\,|\,0) \to (m_1\,|\,m_2\,|\,m_3)$ so geht der Kreis $-\,x_0^2r^2 + \; x_1^2 + x_2^2 = 0$ über in $-(x_0 - m_0)^2r^2 + (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = 0$. Für die Fernpunkte erhält man dann die Bestimmungsgleichung $-(m_0)^2r^2 + (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = 0$, also andere Fernpunkte, u. U. sogar reelle.

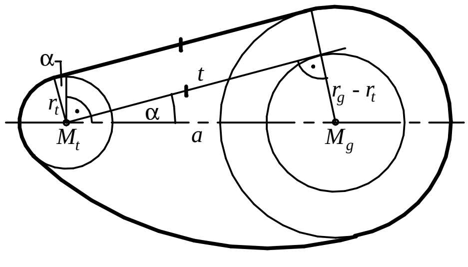
Zu Aufgabe 3:



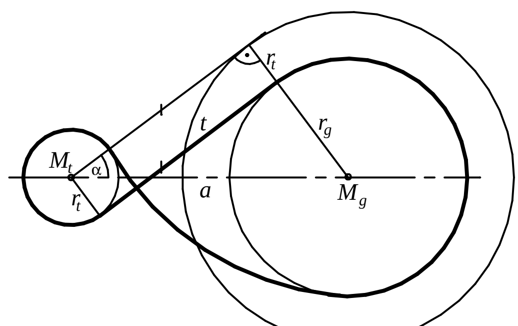
a) Die nebenstehende Zeichnung ist im Maßstab 1:50.
b) Berechnung: Die Mitte von $\overline{AH}$ sei D. Wegen Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, gilt $\angle$DMH = α. Mit den angegebenen Maßen gilt dann
$tan\,\alpha = \frac{0{,}50\,m\;\cdot\,2}{3{,}25\,m} = \frac{1}{3{,}25}$,
$|\overline{DH}| = \frac{|\overline{AH}|}{2} = \frac{\sqrt{3{,}25^2+1}}{4}$.
$r = \frac{|\overline{DH}|}{sin\alpha} = \frac{3{,}25^2+1}{4} = 2{,}890625 \approx 2{,}89\; m$, weil gilt
sin α = $\frac{tan\alpha}{\sqrt{1+tan^2\alpha}}$. Der Abstand des Kreismittelpunktes von der Sehne beträgt also gerundet 2,39 m.

Zu Aufgabe 4:
Wenn r_t = 6,0 cm ist, dann berechnet sich der Radius des getriebenen Rades bei $r_t : r_g$ = 2 : 5 zu r_g = 15 cm. Die folgenden Zeichnungen sind etwa im Maßstab 1 : 10.

a 1) Gleichsinniger Antrieb:



a 2) Gegensinniger Antrieb:

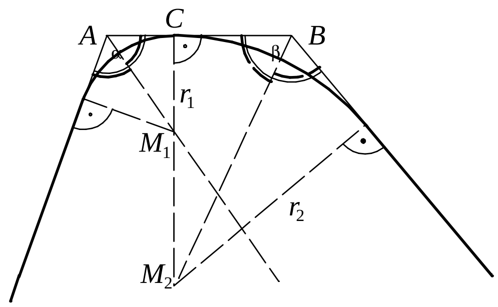


b) Die Mindestlänge des Treibriemens sei U. Das Teil, das das Treibrad berührt, habe die Länge b_t. Das getriebene Rad berührt den Treibriemen längs b_g.

b 1) Rechnung für die gleichsinnige Bewegung der Räder: $t = \sqrt{a^2 - \left(r_g - r_t\right)^2} = 33{,}823069..$ cm ≈ 33,8 cm.
$U = 2t + b_t + b_g$
Bei der Berechnung von b_t und b_g spielt α eine Rolle bei beiden Rädern. Berechnung von α:
$\sin\alpha = \left(r_g - r_t\right)$: a. Hieraus folgt $\alpha \approx 14^o\ 54‘\ 2“ \approx 15^o$. Damit erhält man $b_t = \frac{2\pi\, r_t(180^o - 2\alpha)}{360^o} \approx 15.7$ cm und
$b_g = \frac{2\pi\, r_g(180^o + 2\alpha)}{360^o} \approx 55$ cm. Hieraus folgt $U \approx 138{,}3$ cm.

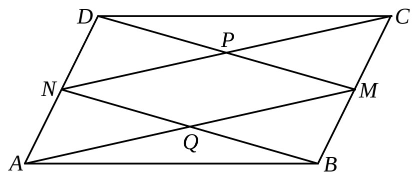
b 2) Rechnung für die gegensinnige Bewegung der Räder: $t = \sqrt{a^2 - \left(r_g + r_t\right)^2} = \quad 28{,}0000..$ cm ≈ 28,0 cm.
Berechnung von α: $\sin\alpha = \left(r_g + r_t\right): a$. Hieraus folgt $\alpha \approx 36^o 52‘12“ \approx 37^o$. Damit erhält man
$b_t = \frac{2\pi\, r_t(180^o + 2\alpha)}{360^o} \approx 26{,}6$ cm und $b_g = \frac{2\pi\, r_g(180^o + 2\alpha)}{360^o} \approx 66{,}5$ cm. Hieraus folgt $U \approx 149{,}1$ cm

c) Die Riemen hängen wie in obigen Zeichnungen durch, damit die Achsen nicht einseitig beansprucht werden. Wollte man den Durchhang genauer bestimmen, müsste man etwas über die auftretenden Reibungskoeffizienten wissen.



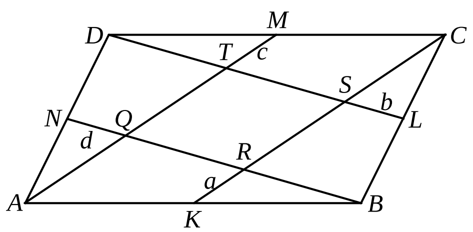
Zu Aufgabe 5:
a) Siehe die nebenstehende Konstruktion.
b) $r_1 = |\overline{AC}| \cdot \tan\frac{\alpha}{2} \approx 34{,}3$ m
$r_2 = |\overline{BC}| \cdot \tan\frac{\beta}{2} \approx\ 87{,}9$ m

Zu Aufgabe 7:
a) Wenn *ABCD* ein Parallelogramm ist, sind $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ parallel und gleich lang, damit gilt das Gleiche für die halben Strecken $\overline{AN}$ und $\overline{MC}$. Deshalb ist *AMCN* ein Parallelogramm und es gilt AM││NC. Entspechend findet man DM││BN.



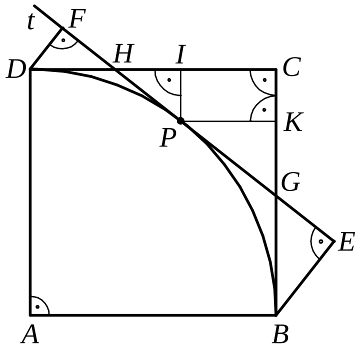
b) Nach Voraussetzung ist *QMPN* ein Parallelogramm und damit sind $\overline{NP}$ und $\overline{QM}$ parallel und gleich lang; also sind *BN* und *MD* parallel.
Betrachtet man die Strahlensatzfigur *AQNDM*, von der man nach Voraussetzung weiß $|\overline{AN}| = |\overline{DN}|$; also folgt nach dem Strahlensatz $|\overline{AQ}| = |QM|$.
Entsprechend findet man $|\overline{NP}| = |\overline{PC}|$. Hieraus folgt: Die Strecken *AM* und *NC* sind parallel und gleich lang, also ist *AMCN* ein Parallelogramm. Hieraus schließt man, dass auch die Strecken *MC* und *AN* gleich lang und parallel sind.
Nach Voraussetzung folgt dann, dass auch die Strecken *AD* und *BC* gleich lang und parallel sind, also *ABCD* ein Parallelogramm ist.

Zu Aufgabe 8:
a) Wenn *ABCD* ein Parallelogramm ist, sind die Strecken *AD* und *BC* gleich lang und parallel, also auch ihre Hälften. Deshalb sind im Parallelogramm *BLDN* die Strecken *BN* und *LD* gleich lang und parallel. Analog folgt dies für die Strecken *AM* und *KC*.



b) Für die Namengebung *K, L, M, N, Q, R, S, T, a, b, c, d* siehe die nebenstehende Zeichnung.
Weil nach Voraussetzung KC││AM und *K* der Mittelpunkt der Strecke *AB* ist, ergibt sich in der Figur *BKARQ* nach dem Strahlensatz $|\overline{AQ}| = 2a$. Man findet in *AQTND* mit dem Strahlensatz $|\overline{AQ}| = |\overline{QT}| = 2a$.
Analog erhält man $|\overline{BR}| = |\overline{RQ}| = 2b$, $|\overline{CS}| = |\overline{SR}| = 2c$ und $|\overline{DT}| = |\overline{TS}| = 2d$.
Da nach Voraussetzung *QRST* ein Parallelogramm ist, folgt $a = c$ und $b = d$. (1)

Nach dem Scheitelwinkelsatz und der Gleichheit gegenüber liegender Winkel im Parallelogramm erhält man $|\angle NQA| = |\angle LSC|$. Wegen (1) sind dann die Dreiecke *CSL* und *AQN* kongruent.
Deshalb sind die Strecken *AN* und *CL* gleich lang und parallel, also auch die doppelt so langen Strecken *AD* und *BC*. Also ist ABCD ein Parallelogramm.



Zu Aufgabe 9:
Die Konfiguration *ABCDEF* samt Kreis ist gegeben. Man benötigt noch einige Hilfslinien, die es ermöglichen, Strecken des Ausgangsquadrats auf *t* zu übertragen. Da man sicher den Satz über die Tangentenabschnitte benötigt, wird man die Lote von *P* aus auf die Quadratseiten *DC* und *BC* fällen und erhält die Fußpunkte *I* und *F*. *PKCI* ist also ein Rechteck.
Scheitelwinkel bei *H*, Lote bei *F* und *I* und die gleich langen Tangentenabschnitte $|\overline{DH}| = |\overline{HP}|$ (1)
ergeben kongruente Dreiecke *DHF* und *PHI* nach dem Kongruenzsatz Sww, da der rechte Winkel der größeren Seite gegenüber liegt. In Folge gilt: $|\overline{DF}| = |\overline{IP}| = |\overline{CK}|$ (2)
Analog findet man: $|\overline{BG}| = |\overline{GP}|$ (3)
und $|\overline{BE}| = |\overline{PK}| = |\overline{IC}|$ (4)
(1), (2), (3) und (4) ergeben:

$$\begin{aligned}|\overline{DF}| + |\overline{FE}| + |\overline{EB}| &= |\overline{DF}| + |\overline{FH}| + |\overline{HP}| + |\overline{PG}| + |\overline{GE}| + |\overline{EB}| = \\ &= |\overline{CK}| + |\overline{HI}| + |DH| + |\overline{GB}| + |\overline{GK}| + |IC| = \\ &= |\overline{DC}| + |\overline{CB}|\end{aligned}$$

5. Literatur

Aufgabenausschuss des Mathematik- Olympiaden e. V. [1] 49. Mathematik-Olympiade 2009/2010, 4. Stufe Bundesrunde Aufgaben und Lösungen Klassen 8 – 13, 1. Tag und 2. Tag, Selbstverlag Rostock 2010

Häusler, Meyer, Ulitzka [2] Aufgaben zur Stereographischen Projektion, Mathematikinformation Nr. 29, Seiten 20 – 36, 1998

Mertenbacher, Richard [3] Betrachtungen zur Kartographie unter besonderer Berücksichtigung der Stereographischen Projektion, Mathematikinformation Nr. 29, Seiten 37 – 44, 1998

Meyer, Karlhorst u. a. [4] Brennpunkt Geometrie 8, Schroedel-Schulbuchverlag, Hannover 1991

Meyer, Karlhorst [5] Kreisgeometrie, Mathematikinformation Nr. 26, Seiten 3 – 24, 1996

[6] Stereographische Projektion, Mathematikinformation Nr. 29, Seiten 3 – 19, 1998

[7] Beweisideen in der Geometrie, Mathematikinformation Nr. 55, Seiten 24 ! 41, 2011

Adresse des Autors:
Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg
e-mail: karlhorst@meyer-muc.de

Diese Arbeit wurde am 11. 4. 2011 angenommen.