Astrid Baumann

Eine kritische Betrachtung zum Thema „Modellierungsaufgaben“ anhand von Beispielen aus dem hessischen Mathematik-Abitur 2009

1. Ein Paradigmenwechsel

War vor der Jahrtausendwende der Einsatz von Taschenrechnern beim Abitur noch verpönt, so hat sich jetzt eine didaktische Kehrtwende vollzogen:

Im schulischen Mathematikunterricht wurde der wissenschaftliche Taschenrechner (in Hessen ab Klasse 7) verpflichtend eingeführt. Zudem ist die Aufrüstung der Oberstufe mit CAS-Rechnern angelaufen.

Die Auswirkungen dieses Experiments sieht man auch und vor allem an den Abituraufgaben.

- Statt an die Erfordernisse zur Sicherung einer mathematischen Hochschulreife wurden die Aufgaben an die Fähigkeiten der Taschenrechner angepasst. Dementsprechend wird eine Einteilung in TR (einfache Taschenrechner), GTR (grafikfähige Taschenrechner) und CAS (Taschenrechner, die ein Leistungsspektrum wie ein abgespecktes Computeralgebra-System aufweisen) vorgegeben.
- Im Zuge des intensiven Taschenrechner-Einsatzes wurde ein neuer Aufgabentyp kreiert, die so genannte **Modellierungsaufgabe**. Die Modellierungsaufgaben sollen Praxisrelevanz demonstrieren. Ihr Praxisbezug ist aber oft sehr fragwürdig.

Modellierungsaufgaben – manchmal auch „anwendungsorientierte Aufgaben“ genannt – finden sich z. B. jetzt regelmäßig im Analysisteil der Abiturprüfung.

In der Regel sind es lange Aufgabentexte und viel Zusatzmaterial, also viel „künstliche Verpackung“, die der Schüler entfernen muss, um zum mathematischen Kern der Aufgabe durchzudringen (dieser ist manchmal erschreckend rudimentär). Seit Jahrhunderten hingegen bemühen sich echte Mathematiker, ihre Problemstellungen und Lösungen – d. h. die Beweise – knapp, klar, elegant und verständlich darzustellen.

Der pseudo-mathematische Duktus und die pseudo-anwendungsorientierten Inhalte der Modellierungsaufgaben sind zur Vorbereitung auf ein Ingenieurstudium nicht nur ungeeignet, sondern geradezu kontraproduktiv. Dies aufzuzeigen ist das Ziel des vorliegenden Artikels.

Für wertvolle Hinweise und die kollegiale Unterstützung bei der Ausarbeitung des Artikels danke ich Herrn Prof. Dr. Bender (U Paderborn), Herrn Prof. Dr. Hackenbracht (FH Frankfurt), Frau Oberstudienrätin Häußge (Friedberg), Herrn Oberstudienrat Kurtz (Stuttgart), Herrn Prof. Dr. Pickert (Gießen), Frau Prof. Dr. Polaczek (FH Aachen), Herrn Prof. Dr. Santowski (FH Frankfurt), Herrn Prof. Dr. Sonar (TU Braunschweig) und Herrn Dr. Walser (U Basel). Insbesondere verweise ich auf den Artikel von H. WALSER in dieser Ausgabe der «Mathematikinformation», der u. a. ebenfalls eine „Modellierungsaufgabe“ behandelt. Herrn Stefan Müller danke ich für das Erstellen dieses Artikels als Word-Datei sowie für seine Anmerkungen aus studentischer Sicht.

2. Der „Anwendungszusammenhang“

Für die folgende Grundkursaufgabe aus dem hessischen Abitur 2009 (Nachtermin, GK (GTR/CAS)A1) ist ein CAS oder GTR erlaubt. Die Aufgabe beginnt folgendermaßen:

> Ein Bauunternehmen baut an Schienenstrecken Lärmschutzwälle, die die angrenzenden Wohngebiete vor Fahrgeräuschen schützen sollen. Das Profil eines solchen Walls und des sich anschließenden Abflussgrabens ist im Intervall [0; 7] nach der Funktionsgleichung $g(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{13}{12}x^2 + \frac{7}{2}x$ (x in Metern) geformt, wobei die x-Achse das waagrechte Gelände darstellt. Bestimmen Sie die Höhe und Brei-

te des Lärmschutzwalls sowie die Tiefe und Breite des rechts neben dem Wall liegenden Abflussgrabens und skizzieren Sie dann das Gesamtprofil in einem Koordinatensystem (alle **End**ergebnisse sind in der Einheit m, auf cm genau anzugeben).

Gefordert ist hier die Diskussion einer Polynomfunktion vom Grad 3, wobei man sogar ohne TR auskommt. Wenn die Funktion faktorisiert wird zu $g(x) = \frac{1}{12}x(x^2 - 13x + 42)$ bzw. $g(x) = \frac{1}{12}x(x-6)(x-7)$, sind sofort die Nullstellen 0, 6 und 7 ablesbar. Hochpunkt und Tiefpunkt können wie üblich über die 1. Ableitung berechnet werden, wobei eine quadratische Gleichung zu lösen ist.

Gerade das wichtige Zerlegen in Faktoren, das hier mit Hilfe des Satzes von VIETA im Kopf durchgeführt werden kann, beherrschen unsere Studienanfänger nicht mehr souverän. Durch den erlaubten Einsatz des GTR – diesen Weg wird der Schüler gehen, um den langatmigen Aufgabentext mit der Funktionsgleichung in Verbindung zu bringen – ist das Faktorisieren jetzt überflüssig geworden. Den Rest dieser Teilaufgabe kann man mit dem GTR-Befehl *trace* lösen. **Berechnung** von Hoch- und Tiefpunkt ist ja nicht gefragt, sondern nur die **Bestimmung**. Und die kann mit dem GTR auf die gewünschte Genauigkeit erfolgen.

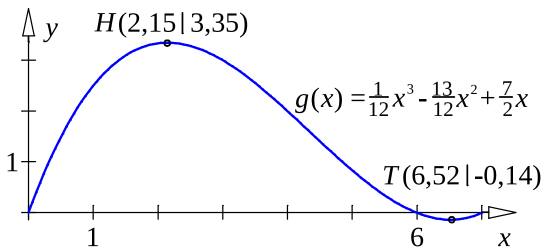


Abb. 1: Lärmschutzwall laut Abituraufgabe „Lärmschutzwallprofil“

Das einzige, was noch von Hand gemacht werden muss, ist die Zeichnung der Kurve. Das prägt sich ein. Daher wird die Abiturientin noch zu Beginn ihres Bauingenieurstudiums wissen, dass sie im Mathe-Abi einen Lärmschutzwall zeichnen musste – mit einem 14 cm tiefen Abflussgraben! Siehe hierzu Abb. 1.

Und hier setzt meine eigentliche Kritik an der Aufgabe ein. Zum Vergleich ist in Abb. 2 die **Bauzeichnung** eines Lärmschutzwalles mit Abflussgraben und Gleisbett gezeigt:

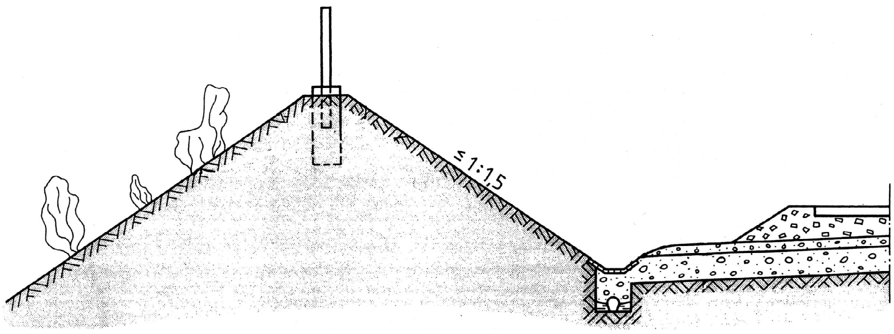


Abb. 2: Lärmschutzwallprofil nach WENDEHORST, Bautechnische Zahlentafeln [6]

Das Profil eines Lärmschutzwalles hat **Trapezform**. Auf den Lärmschutzwall ist hier eine Lärmschutzwand aufgesetzt. Falls keine Lärmschutzwand benötigt wird, ist oben ein Wirtschaftsweg für Wartungsarbeiten vorgesehen. Der Neigungswinkel α der Böschung darf aus Stabilitätsgründen nicht größer als 34° sein (tan α ≤ 1:1,5).

Offensichtlich wurde bei der Lärmschutzwall-Aufgabe eine Pseudo-Anwendung um eine **Polynomfunktion** herum erfunden. Polynomfunktionen und Exponentialfunktionen sind nämlich die einzigen für das Grundkurs – Abitur prüfungsrelevanten Funktionstypen.

3. Reduktion auf das Wesentliche – ein wichtiges Prinzip in der Mathematik

Die Lärmschutzwall-Aufgabe geht auf 1½ DIN-A4-Seiten mit viel Text weiter, wobei im zweiten Aufgabenteil sogar gleich das Ergebnis mitgeteilt wird.
Da wir jetzt wissen, dass Polynomfunktionen dritten oder vierten Grades nichts mit Lärmschutzwall-Profilen zu tun haben, ist die ganze Einkleidung unbrauchbar. Ich habe daher die Aufgabe auf den mathematischen Kern

reduziert. Bei gleichem Schwierigkeitsgrad hat sie jetzt weniger Papierverbrauch. Ein angehender Ingenieurstudent sollte sie auch ohne GTR lösen können.
Die umgestaltete letzte Teilaufgabe ist einer (CAS-) Abituraufgabe aus dem Baden-Württemberg-Abitur 2008 für Berufliche Gymnasien entlehnt.

Lärmschutzwall ohne Lärm

1. Berechnen Sie die Nullstellen, die Extrema und den Wendepunkt der Funktion $g(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{13}{12}x^2 + \frac{7}{2}x$.
2. Bestimmen Sie die Gleichung einer Polynomfunktion vom Grad 4, deren Schaubild folgende Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen hat: $S_1(-5|0)$, $S_2(-4|0)$, $S_3(4|0)$, $S_4(5|0)$, $P(0|4)$.
3. Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = 0{,}01x^4 - 0{,}41x^2 + 4$ das bestimmte Integral $\int_{-5}^{5} f(x)\,dx$, und interpretieren Sie das Ergebnis anhand einer Zeichnung.
4. K_f sei das Schaubild der Funktion f aus Aufgabe 3. Es gibt eine Parallele zur x-Achse, aus der das Schaubild K_f drei gleich lange Strecken ausschneidet. Berechnen Sie die Gleichung dieser Parallelen.

4. Mathematischer Exkurs: Der Krümmungsbegriff

Den Begriff der **Krümmung** einer Kurve im Rahmen eines Analysis-Kurses einzuführen erfordert didaktisches Geschick. Im Gymnasium ist dieser Stoff kein Pflichtprogramm, jedenfalls nicht in Hessen, und schon gar nicht im Grundkurs; trotzdem taucht der Krümmungsbegriff in Abituraufgaben auf (siehe hierzu Kapitel 5.).

Für Ingenieure im Maschinenbau und Bauwesen ist das Verständnis des Krümmungsbegriffes unverzichtbares Grundlagenwissen.

Bekanntlich sind die einzigen Kurven mit konstanter Krümmung Geraden (Krümmung 0) und Kreise. Die Krümmung eines Kreises ist umso größer, je kleiner sein Radius ist, genauer:

Die Krümmung k eines Kreises vom Radius r ist

$$k = 1/r. \tag{1}$$

Für eine beliebige Kurve definiert man die Krümmung lokal. Die Krümmung einer Kurve in einem vorgegebenen kleinen Bereich ist, anschaulich gesprochen, die Richtungsänderung $\Delta\alpha$, bezogen auf die Längenänderung Δs. In Abb.3 ist dies verdeutlicht:
Läuft man vom fest gewählten Punkt P ein Stückchen Δs auf der Kurve, so ändert sich die Richtung der Tangente umso mehr, je stärker die Kurve in diesem Bereich gekrümmt ist. Die Richtungsänderung ist hierbei durch die Änderung des Tangentenanstiegswinkels $\Delta\alpha$ erfasst. Durch Grenzübergang $\Delta s \to 0$ ergibt sich die Krümmung k der Kurve im betrachteten Punkt:

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} \tag{2}$$

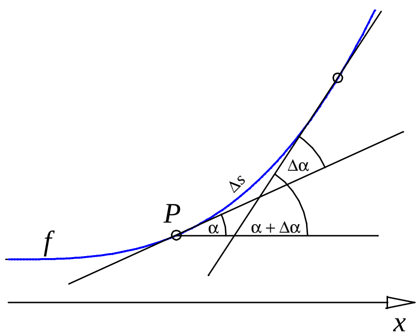


Abb. 3: Zur Definition der Krümmung einer Kurve

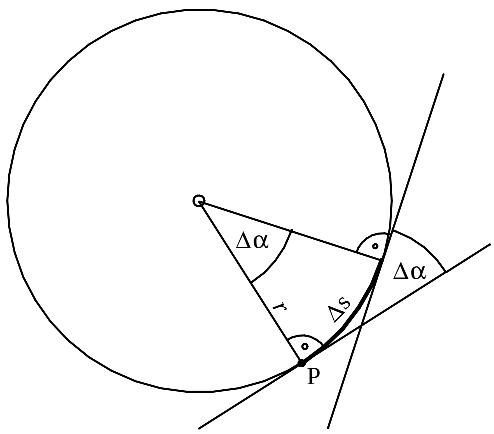


Abb. 4: Zur Krümmung eines Kreises vom Radius r

Die Anwendung der Formel $k = \frac{d\alpha}{ds}$ auf einen Kreis vom Radius r ergibt wegen $\Delta s = r \cong \Delta\alpha$ das bekannte Resultat $k = \frac{1}{r}$, siehe Abb. 4. Aus der Formel (2) leitet man jetzt die Formel für die Krümmung $k(x)$ der (zweimal
differenzierbaren) Funktion $y = f(x)$ im Punkt $P\big(x{*}f(x)\big)$ her:
Aus $\alpha(x) = \arctan\big(f'(x)\big)$ folgt zunächst mit der Kettenregel: $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}$ (3)

Setzt man (3) und das Bogendifferential

$$ds = \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx \qquad (4)$$

in (2) ein, so erhält man

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{f''(x)}{\left(1+(f'(x))^2\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\,,$$

also die Krümmungsformel

$$k(x) = \frac{f''(x)}{\left(1+(f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,. \qquad (5)$$

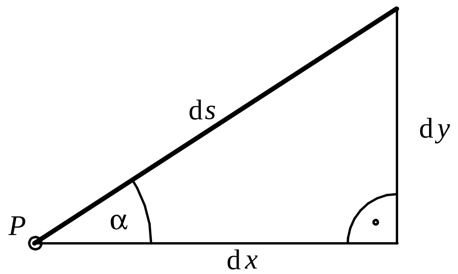


Abb. 5: $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

Aus der Krümmungsformel (5) lässt sich ablesen:

- Die Krümmung ist vorzeichenbehaftet durch das Vorzeichen von $f''(x)$. Bei Linkskrümmung der Kurve $y = f(x)$ an der Stelle x ist $f''(x) > 0$.
- Ist $f''(x) = 0$, z. B. an einer Wendestelle, so ist $k(x) = 0$.
- Ist $f'(x) = 0$, liegt also an der betrachteten Stelle eine waagrechte Tangente vor, so gilt $k(x) = f''(x)$.

Als Beispiel betrachten wir die Normalparabel $f(x) = x^2$ in Abb. 6. Wegen $f'(0) = 0$ ist $k(0) = f''(0) = 2$.

Die Krümmung $k(x)$ wird sichtbar gemacht durch das Einzeichnen des so genannten **Krümmungs-** oder **Schmiegkreises**, der sich an der betrachteten Stelle x optimal der Kurve anpasst. An der Stelle x hat er mit der Kurve die Tangente und den Krümmungswert gemeinsam, stimmt also an der vorgegebenen Stelle mit der Kurve im Funktionswert sowie in der 1. und 2. Ableitung überein.
Sein Radius $r(x)$ ist nach (1) gegeben durch

$$r(x) = \frac{1}{|k(x)|}\,. \qquad (6)$$

Der Krümmungskreis im Scheitel der Normalparabel hat also den Radius $r(0) = \frac{1}{|k(0)|} = \frac{1}{2}$.

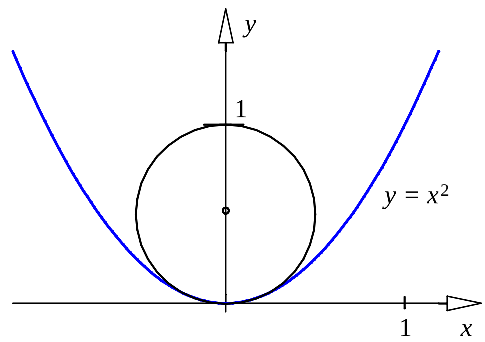


Abb. 6: Normalparabel mit Scheitelkrümmungskreis

Wenn der Krümmungsbegriff von den Schülern gründlich verstanden werden soll, muss man an dieser Stelle noch weitere Beispiele bringen. Man sollte z. B. auch erwähnen, dass eine Wendetangente als Krümmungskreis mit unendlich großem Radius betrachtet werden kann.

5. Ein didaktischer Fauxpas: Neuer Stoff in einer Prüfungssituation

In der Abituraufgabe "Autobahnkreuz" (2009 Nachtermin, GK (CAS) A2) wird der für die Schüler neue Krümmungsbegriff nur kurz eingeführt, und die Prüflinge sollen sofort damit hantieren. Das liest sich so:

> **Information:** Die Krümmung einer Kurve in einem Punkt P wird mit Hilfe eines Kreises (des sog. Krümmungskreises) beschrieben, der die Kurve in P berührt und sich in der Nähe von P dem Kur-

venverlauf optimal anpasst.

Die Krümmungsfunktion $\mathrm{kr}(x) = \frac{(1+f'(x)^2)^{1,5}}{|f''(x)|}$ ordnet jeder Stelle *x* den zugehörigen Krümmungskreisradius zu.

Die Begriffe Krümmung und Krümmungskreisradius sind hier nicht sauber getrennt. Es wird die Formel für den **Radius** r(*x*) des Krümmungskreises angegeben, also unsere Formel (6). Der Begriff „Krümmungsfunktion" ist in diesem Zusammenhang irreführend, ebenso die Bezeichnung kr(*x*). Außerdem wäre bei einem ersten Kontakt mit der Formel die Schreibweise $\left(f'(x)\right)^2$ statt $f'(x)^2$ angebracht. Es fehlt eine Erläuterung zum Fall $f''(x) = 0$.

In jedem Ingenieurmathematikbuch gibt es zur Einführung des Krümmungskreises eine erläuternde Abbildung. Diese fehlt hier ausgerechnet in der Prüfungssituation. Hier häufen sich also mathematikdidaktische und inhaltliche Fehler.

Die „moderne" Didaktik geht davon aus, dass der Prüfling durch die CAS-Nutzung vom „Rechnen" entlastet wird und daher mühelos in der Lage ist, sich in einer Prüfungssituation noch neuen Stoff oder neue Begriffe zu erarbeiten. Noch unfairer sind in dieser Beziehung die Aufgaben 2009 LK (CAS) A1 (**Computermaus**), wo als neuer Stoff in äußerst fragwürdiger Weise Splines eingeführt werden (siehe hierzu den Artikel von H. WALSER [5]), und 2008 LK (TR) A2. In der letztgenannten Aufgabe soll sich der Prüfling in das Thema **LORENZ-Kurven** und **GINI-Koeffizient** einarbeiten. WALTER KRÄMER [3] braucht in seinem Buch „Statistik verstehen" 8 Seiten, um diesen Stoff verständlich zu erklären! Letztendlich läuft es in diesen Fällen darauf hinaus, dass Abiturienten halb verstandene Formeln anwenden und mit Begriffen hantieren, die zu Beginn eines Studiums überhaupt keine Rolle spielen. Wichtiger wäre es, dass Kenntnisse über Logarithmen und Trigonometrie zu Beginn eines mathematiknahen Studiums fest sitzen.

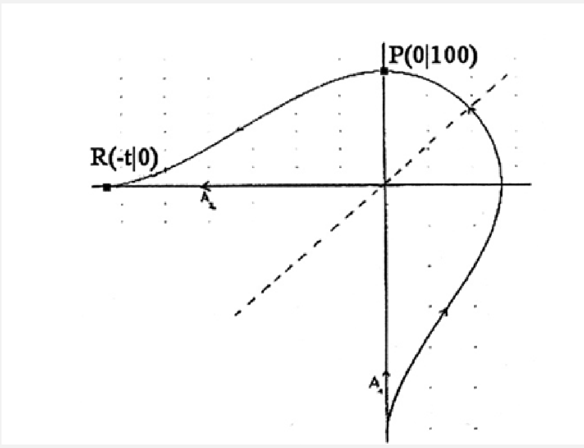
Nach diesen prinzipiellen Überlegungen komme ich auf die Abituraufgabe **„Autobahnkreuz"** zurück:

6. Ein Autobahnkreuz aus der Vogelperspektive

Aufgabe 2009 (Nachtermin) GK (CAS) A2

Zwei sich kreuzende Autobahnen sollen durch eine Überwurftrasse (siehe Skizze) verbunden werden. Folgende Voraussetzungen sind gegeben:

- Die Autobahnen A_1 und A_2 verlaufen senkrecht zu einander.
- Die Gesamtkurve von Abfahrt zu Auffahrt ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden g, das Mittelstück ist ein Viertelkreis.
- Der Abstand des Schnittpunktes der Autobahnen bis zur Auffahrt/Abfahrt beträgt t (in Metern), der Radius des Viertelkreises ist r (in Metern).



Es wird anschließend noch sehr viel Aufgabentext darauf verwendet, dass es letztlich nur darum geht, ein kubisches Parabelstück **ohne Knicke** an den Stellen R(-250│0) und P(0│100) zwischen der *x*-Achse und dem Viertelkreisbogen einzupassen. Das führt auf vier Bedingungen für die gesuchte Polynomfunktion dritten Grades *f*, nämlich $f(-250) = 0$, $f'(-250) = 0$, $f(0) = 100$, $f'(0) = 0$. In den Punkten R und P liegen also waagrechte Tangenten an; die kubische Parabel hat dort ihren Tiefpunkt bzw. Hochpunkt.

Richtig ist, dass auch in der Praxis beim Straßenentwurf zunächst in einer Grundrissebene gearbeitet wird, obwohl die Trassen sich nicht in derselben Ebene kreuzen, und Brückenbauwerke vorhanden sind.

Ein **knickfreier** Übergang, etwa an der Ausfahrt unten rechts, ist zwar notwendig, aber für die Realität nicht hinreichend. Stellen Sie sich vor, Sie fahren mit 100 km/h auf der Autobahn. Dann legt Ihr Fahrzeug in einer Sekunde fast 30 m zurück. Wenn bei solchen Geschwindigkeiten im Anschluss an eine gerade Strecke eine Kurve zu durchfahren ist, muss die **Krümmung** dieser Kurve **kontinuierlich von Null an zunehmen**. Andernfalls wird die Fahrdynamik gestört, weil der Lenkradeinschlag zu plötzlich kommt und die Zentrifugalbeschleunigung abrupt einsetzt („Krümmungsruck“).

Im Straßenbau gibt es dort, wo schnell gefahren wird, als Trassierungselemente grundsätzlich nur Geraden, Kreisbögen, und als Übergangskurven **Klothoidenbögen**.

Eine Klothoide ist die in Abb. 7 gezeigte Kurve.

Bei der Klothoide ist die Krümmung k proportional zum durchlaufenden Bogen s. Die definierende Gleichung lautet:

$$k = \frac{1}{A^2} \cdot s \qquad (7)$$

Die positive Konstante A heißt **Klothoidenparameter**.

Wird also, beginnend im Koordinatenursprung mit $s = 0$, $k = 0$, die Klothoide durchlaufen, so steigert sich die Krümmung k proportional zum zurückgelegten Weg s.

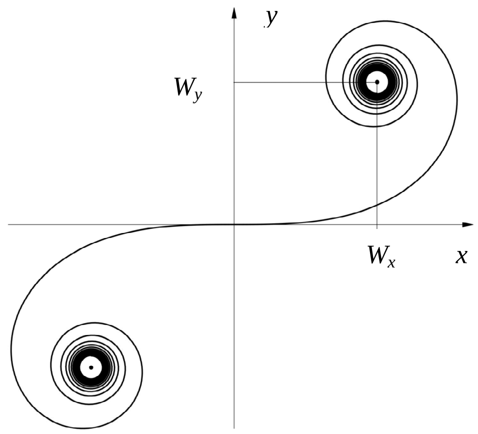


Abb. 7: Klothoide. Koordinaten eines Wickelpunktes: $(W_x \mid W_y) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}A \mid \frac{\sqrt{\pi}}{2}A\right)$

Je länger der Klothoidenbogen s wird, desto stärker krümmt sich die Klothoide. Sie wickelt sich immer weiter ein wie das Garn auf der Rolle, daher der Name Klothoide, d. h. Spinnkurve. Die Klothoide wurde 1937 von dem Ingenieur OERLEY in den Straßenbau eingeführt. Überall wo schnell gefahren wird, also auch auf Eisenbahntrassen oder Achterbahnen, wird die Klothoide als Übergangsbogen verwendet, und zwar immer nur ein kleines Teilstück ab dem Koordinatenursprung. (Der Anstiegswinkel der Tangente im Endpunkt des Klothoidenstücks sollte kleiner oder gleich 30° sein).

Wird das Klothoidenstück OP maßstabsgetreu vergrößert, z. B. auf eine Länge von 40 m oder 200 m, je nach Bedarf, so kann man damit den Übergang von einer geraden Fahrbahn zu einem Kreisbogen bewerkstelligen, wie in Abb. 8 gezeigt wird.

Die Bauingenieure schreiben die Definitionsgleichung (7) der Klothoide in der Form

$$R \cdot L = A^2, \qquad (8)$$

wobei die Bezeichnung L statt s für die Länge des Klothoidenbogens üblich ist. $R = \frac{1}{k}$ ist der Krümmungsradius im Endpunkt P des Klothoidenbogens.

Beim Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve nimmt man eine so genannte **Wendeklothoide** (Klothoidenstück um den Wendepunkt $O(0*0)$).

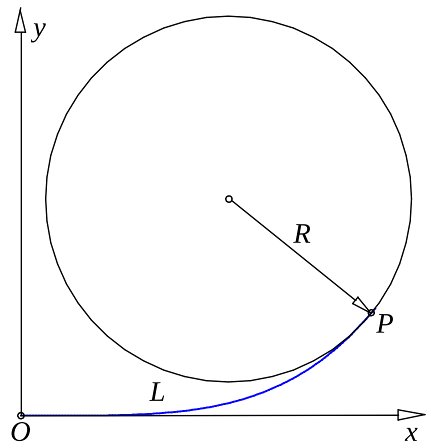


Abb.8: Für den Straßenbau relevantes Teilstück der Klothoide

Bei der Ausfahrt von der geraden Autobahn bewegt man das Fahrzeug zunächst auf dem Klothoidenbogen (mit Parameter A_1) bis zu einem Kreisbogen, dessen Radius R_1 identisch mit dem Krümmungsradius im Endpunkt des Klothoidenbogens ist (siehe Abb. 9).

Während man auf der Klothoide fährt, wird das **Lenkrad proportional zum durchlaufenen Weg weiter eingeschlagen**, bis man den Kreisbogen erreicht, der mit konstantem Lenkradeinschlag durchfahren wird. Den Kreis verlässt man wieder auf einer Klothoide. Es gibt also bei gleichbleibender Geschwindigkeit **kein Hin-und Herruckeln mit dem Steuer**.

Ein weiterer Vorteil bei der Verwendung der Klothoide als Übergangsbogen in einer Kurve ist, dass die Kurve aus der Froschperspektive des Autofahrers optisch besser eingeschätzt werden kann.

Realistische Werte zu den Vorgaben der Abitur-aufgabe (R_2 = 100, t = 250) sind etwa:
A_1 = 150,
R_1 = 250,
A_2 = A_3 = 100.

Mit diesen Angaben (in Metern) lässt sich z. B. die Länge L_1 des Klothoidenbogens mit Parameter A_1 = 150 in Abb. 9 leicht aus (8) berechnen: $L_1 = \frac{{A_1}^2}{R_1}$, also $L_1 = 90$ m.

Die korrekte Anpassung der Klothoidenparameter ist eine der zentralen Aufgaben des Bauingenieurs beim Straßenentwurf und erfordert eine gründliche Ausbildung und berufspraktische Erfahrung.

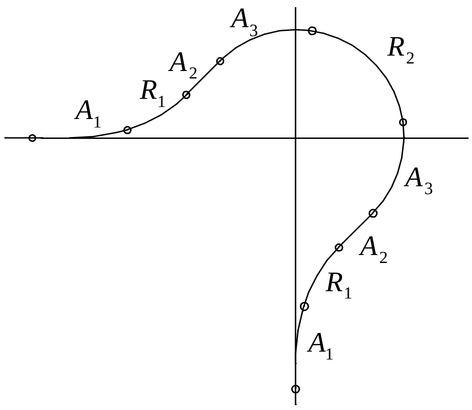


Abb. 9: Entwurfsskizze des Autobahnkreuzes

7. Die Mathematik der Klothoide

Die Koordinaten ($x*y$) der Punkte einer Klothoide mit der definierenden Gleichung (7), also $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{A^2} \cdot s$, (9)

haben keine einfache Gleichung. Aus (9) folgt jedoch $\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{A^2} \cdot s \, \mathrm{d}s$.

Durch Integration dieser Gleichung erhält man $\alpha = \frac{1}{A^2} \int_0^L s \ \mathrm{d}s$ und somit $\alpha = \frac{1}{A^2} \cdot \frac{L^2}{2}$ (10.1)

für den Steigungswinkel α der Tangente am Ende des Klothoidenbogens der Länge L.
Schreibt man die Gleichung (10.1) mit der in der Mathematik üblichen Bezeichnung s für die Bogenlänge, so lautet sie

$$\alpha = \frac{s^2}{2A^2} \ . \tag{10.2}$$

Der Abbildung 5 entnimmt man

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \cos\alpha \cdot \mathrm{d}s \\ \mathrm{d}y &= \sin\alpha \cdot \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{11}$$

Durch Integration dieser beiden Gleichungen erhalten wir mit (10.2)

$$x = \int_0^L \cos\left(\frac{s^2}{2\mathrm{A}^2}\right) \mathrm{d}s$$

$$y = \int_0^L \sin\left(\frac{s^2}{2\mathrm{A}^2}\right) \mathrm{d}s.$$

Dies ist eine Parameterdarstellung der Klothoide mit der Bogenlänge L als Parameter. Durch die Substitution $l = \frac{s}{A}$ wird diese Parameterdarstellung übergeführt in

$$x = A \cdot \int_0^{\frac{L}{A}} \cos\left(\frac{l^2}{2}\right) \mathrm{d}l \tag{12.1}$$

$$y = A \cdot \int_0^{\frac{L}{A}} \sin\left(\frac{l^2}{2}\right) \mathrm{d}l. \tag{12.2}$$

Aus den Gleichungen (12.1) und (12.2) und auch aus der Umformung von (8) zu

$$\frac{R}{A} \cdot \frac{L}{A} = 1 \tag{13}$$

erkennt man, dass jede Klothoide ähnlich ist zu der so genannten **Einheitsklothoide** mit dem Parameter 1. Der Klothoidenparameter A ist dabei der Ähnlichkeitsfaktor (Vergrößerungsfaktor). Die Einheitsklothoide mit der definierenden Gleichung $r \cdot l = 1$ (vgl. Formel (8)) ist also das Pendant zum Einheitskreis. Durch diese Normierung ist eine leichte Handhabung der elementar nicht lösbaren Integrale (12.1) und (12.2) möglich. Diese nach dem Physiker FRESNEL (1788-1827) benannten Integrale werden durch Potenzreihenentwicklung gelöst. Man erhält mit

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - + \dots ,$$

also

$$\cos\left(\frac{l^2}{2}\right) = 1 - \frac{l^4}{8} + \frac{l^8}{2^4 \cdot 4!} - \frac{l^{12}}{2^6 \cdot 6!} + \frac{l^{16}}{2^8 \cdot 8!} - + \dots ,$$

durch Einsetzten in (12.1):

$$x = A \cdot \int_0^{\frac{L}{A}} \cos\left(\frac{l^2}{2}\right) \mathrm{d}l = A \cdot \left(l - \frac{l^5}{40} + \frac{l^9}{3456} - \frac{l^{13}}{599040} + \frac{l^{17}}{175472640} - + \cdots\right) \text{ mit } l = \frac{L}{A}. \quad (13.1)$$

Analog erhält man

$$y = A \cdot \left(\frac{l^3}{6} - \frac{l^7}{336} + \frac{l^{11}}{42240} - \frac{l^{15}}{9676800} + - \cdots\right) \text{ mit } l = \frac{L}{A}. \quad (13.2)$$

Die Anzahl der aufgeschriebenen Glieder in diesen Reihenentwicklungen ist ausreichend für eine mm-Genauigkeit bei $A \leq 3000$ m.

Früher nahmen die Straßenbauingenieure bei ihren Berechnungen die Klothoidentafeln der Einheitsklothoide zu Hilfe (siehe KASPER, LORENZ, SCHÜRBA [2]). Heute ist die Berechnung einer Klothoide im CAD-Programm integriert. Damit ist ein Klothoidenbogen so leicht zu handhaben wie ein Kreisbogen.

Die Verwendung von Polynomfunktionen und CAS ist also beim Straßenentwurf tatsächlich notwendig. Sie kommen allerdings in völlig anderem Zusammenhang zum Einsatz, als sich das der Aufgabensteller der Abituraufgabe gedacht hat.

8. Resümee

Ein CAS ist ein unverzichtbares Hilfsmittel für den Anwendungskomplex "Modellbildung und Simulation" - aber erst, wenn die mathematischen Grundlagen sicher beherrscht werden und die anwendungsbezogenen Anforderungen korrekt gestellt und auch verstanden werden können. Dagegen ist der Aufgabentyp „Modellierungsaufgabe“ ein merkwürdiges Konstrukt, das mit handwerklich solider Mathematik nichts zu tun hat.

Solche Aufgaben schaffen nur Verwirrung in der mathematischen und praktischen Allgemeinbildung junger Menschen, deren Beobachtungsgabe und Vorstellungsvermögen dadurch fehlgeleitet werden können.

Leider haben diese - meistens den Gesetzen der Physik widersprechenden - Aufgabenstellungen auch schon Einzug gehalten in die Fachoberschulen, deren Schulabgänger oft ein FH-Ingenieur-Studium beginnen. Ein Lehrbuch, das vor fehlerhaften Modellierungsaufgaben nur so strotzt, ist der 2008 erschienene Band „Mathematik für die Fachhochschulreife FOS mit Vektorrechnung“ von SCHIEMANN, DILLINGER U. A. [4].

Unter den hessischen Abituraufgaben fallen noch weitere in die Fehlerkategorie der „Klothoidenblindheit“:
2009 GK (TR) A2 (Eisenbahn-Gleisverbindung)
2009 LK (CAS) A2 Nachtermin (Autobahnauffahrt)
2009 GK (GTR/CAS) A2 (Ski-Sprungschanze).

Die Einführung von Modellierungsaufgaben in den abiturrelevanten Stoff erfolgte parallel zur Einführung von CAS-Rechnern. Paradoxerweise ist durch beides bisher keine wesentliche Bereicherung der Schulmathematik eingetreten, sondern im Gegenteil eine Art Kastration.
So vielfältig die Einkleidungen in Modellierungsaufgaben auf den ersten Blick daherkommen, handelt es sich meistens doch nur um eine mehr oder weniger frei erfundene Geschichte, die sich um eine Polynomfunktion oder Exponentialfunktion herum rankt. Die anderen wichtigen Funktionsklassen wurden aus dem Lehrplan gestrichen. Gerade im Hinblick auf die allgemeine Hochschulreife sind aber die trigonometrischen Funktionen, die

Exponentialfunktion, die ganz- und gebrochen-rationalen Funktionen unverzichtbar. Die gebrochen-rationalen Funktionen sind derzeit in Hessen weder im Grund- noch im Leistungskurs Pflicht.

Alle diese Funktionstypen sollten auch in der Schul-Analysis ausführlich behandelt werden, inklusive der zugehörigen Ableitungsregeln und ihren Umkehrfunktionen. Die klassischen Extremwertaufgaben kann man als sinnvolle Anwendungsaufgaben in der Schule offenbar nicht mehr stellen, weil dabei auftretende Funktionen nicht mehr im Lehrplan vorgesehen sind. Diese hausgemachte Notlage hat wohl ebenfalls zum Ausweichen auf die „Modellierungsaufgaben“ beigetragen.

Durch die Fokussierung auf Polynomfunktionen und Exponentialfunktionen, in Verbindung mit CAS-Einsatz, müssen sich die Schüler jetzt für das Abitur mit sehr speziellen CAS-Befehlen vertraut machen, wie z. B. das Auffinden von Ausgleichspolynomen, exponentielle Regression, Spline-Funktionen und das Lösen von unhandlichen linearen Gleichungssystemen. Diese speziellen Themen, CAS-Befehle und -Geräte sind zu **Beginn eines Mathematik- oder Ingenieurstudiums** aber **nicht relevant**.

Viel wichtiger ist es, einen **wissenschaftlichen** Taschenrechner korrekt bedienen zu können, zumindest alle darauf vorhandenen Funktionstasten sicher benutzen zu können. Studienanfänger haben dabei häufig folgende Probleme:

! Bei den trigonometrischen Funktionen und ihren Umkehrfunktionen wird nicht auf die richtige Voreinstellung (RAD oder DEG) geachtet. Das Symbol „ $\tan^{-1}$ “ wird mit „1:tan“ verwechselt.
! „Warum erhalte ich mit der Taste $\sin^{-1}$ zu einem Sinuswert nicht immer den gesuchten Winkel?“
! „Ist $\sqrt[3]{x^5}$ dasselbe wie $\left(\sqrt[3]{x}\right)^5$? “
! „Ist es schlimm, wenn auf meinem Taschenrechner die Taste „$\log_a$“ fehlt?“

Solche Fragen sollten bereits vor Studienbeginn geklärt sein.

Eine wichtige Kompetenz besteht darin, die Lösung einer Mathematikaufgabe ordentlich aufschreiben zu können. Nach meinen Beobachtungen wird diese Fähigkeit durch intensiven Taschenrechner-Einsatz **nicht** gefördert.

9. Literatur

Hinweis: Die hessischen Abituraufgaben werden vom Kultusministerium nicht ins Netz gestellt. Man findet sie z. B. in Trainingsbüchern, die in Verlagen erscheinen. Sie können auch beim hessischen Kultusministerium erworben werden. Ein Jahrgangssatz mit 6 Abituraufgaben kostet 600 €.

Gruber; Neumann [1] Erfolg im Mathe-Abi Hessen GTR/CAS. Sicher ins Abitur 2010. Leistungskurs, Freiburger Verlag 2009, ISBN 978-3-86814-095-8 (€ 12,90).

Kasper; Lorenz; Schürba [2] Die Klothoide als Trassierungselement, Ferdinand Dümmlers Verlag, Bonn 1968.

Krämer, Walter [3] Statistik verstehen, Campus-Verlag, Frankfurt-New York 1999.

Schiemann; Dillinger; Grimm; Mack; Müller [4] Mathematik für die Fachhochschulreife, FOS mit Vektorrechnung, Europa-Lehrmittel-Verlag, Nourney, Vollmer GmbH, Haan-Gruiten 2008.

Walser, Hans [5] Die Modellierung des schönen Scheins, Mathematikinformation Nr. 55 (2011) Seiten 3 – 14.

Wendehorst; Wetzell [6] Bautechnische Zahlentafeln, 26. Auflage, Teubner-Verlag, Stuttgart 1994.

Adresse der Autorin:
Dr. Astrid Baumann
Kiefernweg 15
D 61169 Friedberg
astrid.baumann@fb1.fh-frankfurt.de

Die Arbeit wurde am 11. 1. 2011 angenommen.