Jörg Meyer

Interpolation von Binomialkoeffizienten

0 Einleitung

Welche Werte nehmen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ an, wenn n und k keine natürlichen Zahlen sind? Diese Frage vernetzt sich in zum Teil überraschender Weise mit einer ganzen Reihe anderer mathematischer Gebiete. Personell wird ein Bogen geschlagen von John Wallis (1616 – 1703), der in fruchtbarer Weise erste Untersuchungen angestellt hat („for it was by following the trail which had been blazed by Wallis that Newton was led to one of his most famous discoveries, the Binomial Theorem")[1] bis hin zu Leonhard Euler (1707 – 1783), mit dessen Beta-Funktion das in Rede stehende Problem abschließend gelöst wird.

1 Die binomische Formel für natürliche Exponenten

Bekanntlich ensteht aus Beziehungen wie

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a\cdot(a+b)^3 + b\cdot(a+b)^3\\ &= a\cdot\left(a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3\right)+b\cdot\left(a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3\right)\\ &= a^4+(3+1)\cdot a^3\cdot b+(3+3)\cdot a^2\cdot b^2+(1+3)\cdot a\cdot b^3+b^4\\ &= a^4+4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a\cdot b^3+b^4\end{aligned}$$

das Pascal-Dreieck, das übrigens in Indien, Arabien und China schon lange vor Pascal bekannt war.

$\boxed{\binom{0}{0}=1}$

$\boxed{\binom{1}{0}=1}$ $\boxed{\binom{1}{1}=1}$

$\boxed{\binom{2}{0}=1}$ $\boxed{\binom{2}{1}=2}$ $\boxed{\binom{2}{2}=1}$

$\boxed{\binom{3}{0}=1}$ $\boxed{\binom{3}{1}=3}$ $\boxed{\binom{3}{2}=3}$ $\boxed{\binom{3}{3}=1}$

$\boxed{\binom{4}{0}=1}$ $\boxed{\binom{4}{1}=4}$ $\boxed{\binom{4}{2}=6}$ $\boxed{\binom{4}{3}=4}$ $\boxed{\binom{4}{4}=1}$

$\boxed{\binom{5}{0}=1}$ $\boxed{\binom{5}{1}=5}$ $\boxed{\binom{5}{2}=10}$ $\boxed{\binom{5}{3}=10}$ $\boxed{\binom{5}{4}=5}$ $\boxed{\binom{5}{5}=1}$

$\boxed{\binom{6}{0}=1}$ $\boxed{\binom{6}{1}=6}$ $\boxed{\binom{6}{2}=15}$ $\boxed{\binom{6}{3}=20}$ $\boxed{\binom{6}{4}=15}$ $\boxed{\binom{6}{5}=6}$ $\boxed{\binom{6}{6}=1}$

$\boxed{\binom{7}{0}=1}$ $\boxed{\binom{7}{1}=7}$ $\boxed{\binom{7}{2}=21}$ $\boxed{\binom{7}{3}=35}$ $\boxed{\binom{7}{4}=35}$ $\boxed{\binom{7}{5}=21}$ $\boxed{\binom{7}{6}=7}$ $\boxed{\binom{7}{7}=1}$

Die hier entscheidende Eigenschaft ist die additive Beziehung

$$\boxed{\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}}. \qquad \text{(Add)}$$

[1] Scott [11] , S. 2.

2 Fortsetzung des Pascal-Dreiecks nach rechts und nach oben

Wegen $(a+b)^3 = \boxed{1}\cdot a^3 + \boxed{3}\cdot a^2\cdot b + \boxed{3}\cdot a\cdot b^2 + \boxed{1}\cdot b^3 + \boxed{0}\cdot a^{-1}\cdot b^4 + \boxed{0}\cdot a^{-2}\cdot b^5 + \ldots$ ist $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$. Die Fortsetzung des Pascal-Dreiecks nach <u>rechts</u> ist daher langweilig:

$$\boxed{\tbinom{0}{0}=1}\quad \boxed{\tbinom{0}{1}=0}\quad \boxed{\tbinom{0}{2}=0}\quad \boxed{\tbinom{0}{3}=0}\quad \boxed{\tbinom{0}{4}=0}\quad \boxed{\tbinom{0}{5}=0}$$

$$\boxed{\tbinom{1}{0}=1}\quad \boxed{\tbinom{1}{1}=1}\quad \boxed{\tbinom{1}{2}=0}\quad \boxed{\tbinom{1}{3}=0}\quad \boxed{\tbinom{1}{4}=0}\quad \boxed{\tbinom{1}{5}=0}$$

$$\boxed{\tbinom{2}{0}=1}\quad \boxed{\tbinom{2}{1}=2}\quad \boxed{\tbinom{2}{2}=1}\quad \boxed{\tbinom{2}{3}=0}\quad \boxed{\tbinom{2}{4}=0}\quad \boxed{\tbinom{2}{5}=0}\quad \boxed{\tbinom{2}{6}=0}$$

$$\boxed{\tbinom{3}{0}=1}\quad \boxed{\tbinom{3}{1}=3}\quad \boxed{\tbinom{3}{2}=3}\quad \boxed{\tbinom{3}{3}=1}\quad \boxed{\tbinom{3}{4}=0}\quad \boxed{\tbinom{3}{5}=0}\quad \boxed{\tbinom{3}{6}=0}$$

$$\boxed{\tbinom{4}{0}=1}\quad \boxed{\tbinom{4}{1}=4}\quad \boxed{\tbinom{4}{2}=6}\quad \boxed{\tbinom{4}{3}=4}\quad \boxed{\tbinom{4}{4}=1}\quad \boxed{\tbinom{4}{5}=0}\quad \boxed{\tbinom{4}{6}=0}\quad \boxed{\tbinom{4}{7}=0}$$

$$\boxed{\tbinom{5}{0}=1}\quad \boxed{\tbinom{5}{1}=5}\quad \boxed{\tbinom{5}{2}=10}\quad \boxed{\tbinom{5}{3}=10}\quad \boxed{\tbinom{5}{4}=5}\quad \boxed{\tbinom{5}{5}=1}\quad \boxed{\tbinom{5}{6}=0}\quad \boxed{\tbinom{5}{7}=0}$$

Viel interessanter ist es, unter Beachtung der <u>additiven</u> Beziehung (Add) das Pascal-Dreieck nach <u>rechts oben</u> fortzusetzen[2]:

$$\boxed{\tbinom{-4}{0}=1}\quad \boxed{\tbinom{-4}{1}=-4}\quad \boxed{\tbinom{-4}{2}=10}\quad \boxed{\tbinom{-4}{3}=-20}$$

$$\boxed{\tbinom{-3}{0}=1}\quad \boxed{\tbinom{-3}{1}=-3}\quad \boxed{\tbinom{-3}{2}=6}\quad \boxed{\tbinom{-3}{3}=-10}$$

$$\boxed{\tbinom{-2}{0}=1}\quad \boxed{\tbinom{-2}{1}=-2}\quad \boxed{\tbinom{-2}{2}=3}\quad \boxed{\tbinom{-2}{3}=-4}\quad \boxed{\tbinom{-2}{4}=5}$$

$$\boxed{\tbinom{-1}{0}=1}\quad \boxed{\tbinom{-1}{1}=-1}\quad \boxed{\tbinom{-1}{2}=1}\quad \boxed{\tbinom{-1}{3}=-1}\quad \boxed{\tbinom{-1}{4}=1}$$

$$\boxed{\tbinom{0}{0}=1}\quad \boxed{\tbinom{0}{1}=0}\quad \boxed{\tbinom{0}{2}=0}\quad \boxed{\tbinom{0}{3}=0}\quad \boxed{\tbinom{0}{4}=0}\quad \boxed{\tbinom{0}{5}=0}$$

$$\boxed{\tbinom{1}{0}=1}\quad \boxed{\tbinom{1}{1}=1}\quad \boxed{\tbinom{1}{2}=0}\quad \boxed{\tbinom{1}{3}=0}\quad \boxed{\tbinom{1}{4}=0}\quad \boxed{\tbinom{1}{5}=0}$$

$$\boxed{\tbinom{2}{0}=1}\quad \boxed{\tbinom{2}{1}=2}\quad \boxed{\tbinom{2}{2}=1}\quad \boxed{\tbinom{2}{3}=0}\quad \boxed{\tbinom{2}{4}=0}\quad \boxed{\tbinom{2}{5}=0}\quad \boxed{\tbinom{2}{6}=0}$$

$$\boxed{\tbinom{3}{0}=1}\quad \boxed{\tbinom{3}{1}=3}\quad \boxed{\tbinom{3}{2}=3}\quad \boxed{\tbinom{3}{3}=1}\quad \boxed{\tbinom{3}{4}=0}\quad \boxed{\tbinom{3}{5}=0}\quad \boxed{\tbinom{3}{6}=0}$$

Allerdings geht hier die von „gewöhnlichen" Binomialkoeffizienten bekannte <u>Symmetrie</u>

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{S}$$

verloren, denn für $k \neq 0$ ist stets[3] $\binom{-1}{k} \neq \binom{-1}{-1-k}$.

Aufgabe: Warum ist für $k \neq 0$ stets $\binom{-1}{k} \neq \binom{-1}{-1-k}$?

---

[2] Scriba [10], S. 221 ff.
[3] Siehe etwa Graham / Knuth / Patashnik [4], S. 156.

Bei „gewöhnlichen" Binomialkoeffizienten hat man die multiplikative Beziehung

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{\text{k Faktoren abwärts}}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}_{\text{k Faktoren aufwärts}}}. \qquad \text{(Mult)}$$

Offensichtlich ist für positive n analog

$$\binom{-n}{k} = \frac{\overbrace{(-n)\cdot(-n-1)\cdot\ldots\cdot(-n-k+1)}^{\text{k Faktoren abwärts}}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}_{\text{k Faktoren aufwärts}}}. \qquad \text{(-Mult)}$$

Aufgabe: Man beweise (Mult) und (-Mult).

3 Sinngebung

Hat die Fortsetzung der Binomialkoeffizienten irgendeine Bedeutung? Die vorletzte Zeile

$$\boxed{\tbinom{2}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{2}{1}=2} \quad \boxed{\tbinom{2}{2}=1}$$

im obigen Schema bedeutet, dass

$$(1+q)^2 = \boxed{1}\cdot q^0 + \boxed{2}\cdot q^1 + \boxed{1}\cdot q^2$$

ist. Entsprechend müsste die vierte Zeile

$$\boxed{\tbinom{-1}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{-1}{1}=-1} \quad \boxed{\tbinom{-1}{2}=1} \quad \boxed{\tbinom{-1}{3}=-1} \quad \boxed{\tbinom{-1}{4}=1}$$

als

$$(1+q)^{-1} = \boxed{1}\cdot q^0 + \boxed{-1}\cdot q^1 + \boxed{1}\cdot q^2 + \boxed{-1}\cdot q^3 + \ldots \qquad \text{(geomR)}$$

und die dritte Zeile

$$\boxed{\tbinom{-2}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{-2}{1}=-2} \quad \boxed{\tbinom{-2}{2}=3} \quad \boxed{\tbinom{-2}{3}=-4} \quad \boxed{\tbinom{-2}{4}=5}$$

als

$$(1+q)^{-2} = \boxed{1}\cdot q^0 + \boxed{-2}\cdot q^1 + \boxed{3}\cdot q^2 + \boxed{-4}\cdot q^3 + \ldots \qquad \text{(geomR')}$$

zu lesen sein.

(geomR) besagt, dass $\boxed{\frac{1}{1+q} = 1-q+q^2-q^3+-\ldots}$ ist, und das ist natürlich (für $|q|<1$) die Summenformel für die geometrische Reihe! Wir sehen also:

Die geometrische Reihe ist ein Spezialfall der binomischen Formel!

Im letzten Abschnitt hatten wir die Binomialkoeffizienten für negative obere Argunmente erhalten, indem die von den gewöhnlichen Binomialkoeffizienten bekannte Beziehung (Add) einfach fortgesetzt wurde, ohne sich um ein inhaltliche Anbindung zu kümmern. Jetzt ist ersichtlich, dass eine inhaltliche Anbindung tatsächlich gelingen kann, jedoch nur in der Einschränkung $|q|<1$ sinnvoll ist.

4 Zusammenhang zum Ableiten

Man bekommt (geomR') aus (geomR) durch Ableiten nach q. Das ist schon bei den gewöhnlichen binomischen Formeln so:
Leitet man $(1+q)^3 = 1+3\cdot q+3\cdot q^2+q^3$ nach q ab, so erhält man $(1+q)^2 = 1+2\cdot q+q^2$. Dies Schema setzt sich also fort.

Allgemein folgt aus $(1+q)^n = 1+\binom{n}{1}\cdot q+\binom{n}{2}\cdot q^2+\binom{n}{3}\cdot q^3+\binom{n}{4}\cdot q^4+\ldots$ durch Ableiten, dass

$$n\cdot(1+q)^{n-1} = \binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}\cdot q+3\cdot\binom{n}{3}\cdot q^2+4\cdot\binom{n}{4}\cdot q^3+\ldots$$

ist. Wendet man aber andererseits auf $(1+q)^{n-1}$ direkt die binomische Formel an, so ist

$$n\cdot(1+q)^{n-1} = n+n\cdot\binom{n-1}{1}\cdot q+n\cdot\binom{n-1}{2}\cdot q^2+n\cdot\binom{n-1}{3}\cdot q^3+\ldots.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$k\cdot\binom{n}{k} = n\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

und damit

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\binom{n-2}{k-2} = \ldots = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{1}\cdot\binom{n-k}{0}$$

und folglich

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}. \qquad \text{(Mult)}$$

Also gibt es auch einen Weg von (Add) nach (Mult) über die Analysis (Ableiten).

Aufgabe: Was geschieht, wenn man die Argumentation für negative Werte von n durchführt?

5 Ein anderer Weg zur geometrischen Reihe

Wir versuchen, (geomR) auf anderem Wege[4] zu erhalten, indem wir $(1+q)^{-1} = \frac{1}{1+q}$ <u>approximieren</u>.

<u>1. Annäherung</u>: $\frac{1}{1+q} \approx 1$ für sehr kleine q.

Verbesserung: $\frac{1}{1+q} = 1+\delta_1$ mit sehr kleinem δ_1.

Dann ist $1 = 1+\delta_1+q+\underbrace{\delta_1\cdot q}_{\text{zu vernachlässigen}}$, also $\delta_1 = -q$.

Dies führt zur

<u>2. Annäherung</u>: $\frac{1}{1+q} \approx 1-q$ (Kontrolle auch durch die 3. binomische Formel möglich)

Verbesserung: $\frac{1}{1+q} = 1-q+\delta_2$ mit sehr kleinem δ_2 (viel kleiner als q).

Dann ist $1 = 1-q+\delta_2+q-q^2+\underbrace{\delta_2\cdot q}_{\text{zu vernachlässigen}}$, also $\delta_2 = q^2$

Und so fort ...

Für betragsmäßig hinreichend kleine Werte von q ist also $\boxed{(1+q)^{-1} = 1-q+q^2-q^3+-\ldots}$.

Aufgabe: Was heißt „hinreichend klein"? Was passiert bei $|q| = 1$?

Nebenbei: Aufleiten von (geomR) liefert $\boxed{\ln(1+q) = q-\frac{q^2}{2}+\frac{q^3}{3}-\frac{q^4}{4}+-\ldots}$ (<u>Mercator</u>-Reihe; 1668)

[4] Hairer / Wanner [5], S. 20.

6 Gebrochene Exponenten

Wir kopieren die Vorgehensweise des letzten Abschnitts für die Berechnung[5] von $\boxed{(1+q)^{1/2}}$ und

approximieren $(1+q)^{1/2} = \sqrt{1+q}$.

1. Annäherung: $\sqrt{1+q} \approx 1$ für sehr kleine q.

Verbesserung: $\sqrt{1+q} = 1+\delta_1$ mit sehr kleinem δ_1.

$$\text{Dann ist } 1+q = 1+2\cdot\delta_1 + \underbrace{\delta_1^2}_{\text{zu vernachlässigen}} \text{ und somit } \delta_1 = \frac{q}{2}.$$

Dies führt zur

2. Annäherung: $\boxed{\sqrt{1+q} \approx 1+\frac{q}{2}}$

Wir halten inne, denn diese Formel lässt sich verwenden für die approximative Berechnung von Quadratwurzeln!

Exkurs: Berechnung von Quadratwurzeln

$\sqrt{7} = \sqrt{1+6}$ ungeeignet, da 6 nicht klein ist

$$\underbrace{\sqrt{7}}_{2,64...} = \sqrt{9\cdot\frac{7}{9}} = 3\cdot\sqrt{1-\frac{2}{9}} \approx 3\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{8}{3} = 2,\overline{6}$$

$$\underbrace{\sqrt{7}}_{2,64...} = \sqrt{16\cdot\frac{7}{16}} = 4\cdot\sqrt{1-\frac{9}{16}} \approx 4\cdot\left(1-\frac{9}{32}\right) = \frac{23}{8} = 2,875 \text{ ist eine schlechtere Approximation, da } \frac{9}{16} > \frac{2}{9}$$

$$\underbrace{\sqrt{2}}_{1,41...} = \sqrt{4\cdot\frac{2}{4}} = 2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}} \approx 2\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\underbrace{\sqrt{50}}_{7,07...} = \sqrt{64\cdot\frac{50}{64}} = 8\cdot\sqrt{1-\frac{7}{32}} \approx 8\cdot\left(1-\frac{7}{64}\right) = \frac{57}{8} = 7,125$$

Übersichtlichere Verwendung:

Man kann die Formel $\boxed{\sqrt{1+q} \approx 1+\frac{q}{2} \text{ für } |q|<1}$ mit $q = \frac{b}{a^2}$ besser schreiben als $\sqrt{1+\frac{b}{a^2}} \approx 1+\frac{b}{2\cdot a^2}$ für $|b| < a^2$ bzw. noch besser als $\boxed{\sqrt{a^2+b} \approx a+\frac{b}{2\cdot a} \text{ für } |b|<a^2}$.

Diese Formel lässt sich auch noch anders deuten:

Wir wollen $\sqrt{N}$ berechnen und beginnen mit dem Startwert a. Die Abweichung $b = N-a^2$ ist (hoffentlich) klein. Dann ist

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2+b} \approx a+\frac{N-a^2}{2\cdot a} = \frac{a^2+N}{2\cdot a} = \frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{N}{a}\right).$$

Dies ist das Heron-Verfahren (Babylon, ca. 1900 VOR Christus), das bekanntlich sehr gut konvergiert. Es ist ein Spezialfall der Newtonschen Tangentenmethode.

Zurück zur Approximation von $\sqrt{1+q}$! Wir hatten die

2. Annäherung: $\boxed{\sqrt{1+q} \approx 1+\frac{q}{2}}$

Verbesserung: $\sqrt{1+q} = 1+\frac{q}{2}+\delta_2$ mit sehr kleinem δ_2.

$$\text{Dann ist } 1+q = 1+\frac{q^2}{4}+q+2\cdot\delta_2 + \underbrace{\delta_2\cdot q+\delta_2^2}_{\text{zu vernachlässigen}} \text{ und somit } \delta_2 = -\frac{q^2}{8}.$$

[5] Hairer / Wanner [5], S. 20 ff.

Dies führt zur

<u>3. Annäherung</u>: $\boxed{\sqrt{1+q} \approx 1 + \frac{q}{2} - \frac{q^2}{8}}$

Auch diese Formel lässt sich natürlich verwenden:
<u>Exkurs</u>: <u>Schnellere Berechnung von Quadratwurzeln</u>

Umformulierung mit $q = \frac{b}{a^2}$ führt auf $\boxed{\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2\cdot a} - \frac{b^2}{8\cdot a^3} \quad \text{für } |b| < a^2}$

Beispiel: $\underbrace{\sqrt{7}}_{2{,}6457513...} = \sqrt{9-2} \approx \underbrace{\underbrace{3 - \frac{2}{2\cdot 3}}_{2{,}\overline{6}} - \frac{4}{8\cdot 27}}_{2{,}648148...}$

Die Konvergenz ist sehr schnell!

Aufgabe: Man berechne auf diese Art und Weise auch andere Wurzeln. Wie lautet eine zum Heron-Verfahren analoge Formulierung?

Insgesamt (<u>Newton</u> 1665): Für betragsmäßig hinreichend kleine Werte von x ist

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{8}\cdot x^2 + \frac{1}{16}\cdot x^3 - \frac{5}{128}\cdot x^4 + - ... = \sum_{i\geq 0} \binom{1/2}{i}\cdot x^i}$$

Es handelt sich um die Taylor-Entwicklung von $\sqrt{1+x}$ an der Stelle 0.

Aufgabe: Was heißt „hinreichend klein“?

7 Binomialkoeffizienten mit halbzahligen oberen Argumenten

Offenbar ist es sinnvoll, $\binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}$ und $\binom{1/2}{2} = -\frac{1}{8}$ sowie $\binom{1/2}{3} = \frac{1}{16}$ zu setzen. Wie kommt man schnell an die Werte für $\binom{1/2}{k}$?

Da man mit (Add) offenbar nicht weiterkommt, versuchen wir unser Glück mit der <u>multiplikativen</u> Beziehung (Mult)! Wenn (Mult) auch für halbzahlige obere Argumente gilt, ist

$$\binom{1/2}{2} = \frac{\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)}^{\text{2 Faktoren abwärts}}}{\underbrace{1\cdot 2}_{\text{2 Faktoren aufwärts}}} = -\frac{1}{8}$$

und

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)}^{\text{3 Faktoren abwärts}}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot 3}_{\text{3 Faktoren aufwärts}}} = \frac{1}{16}.$$

Dies sieht ganz gut aus!

Aufgabe: Man beweise, dass $\binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{4^k\cdot(2\cdot k-1)}\cdot\binom{2\cdot k}{k}$ für $k > 0$ gilt.

Gibt es auch einen Weg zu $\binom{1/2}{k}$ über das Pascal-Dreieck? Berechnet man einige Binomialkoeffizienten mit halbzahligem oberen Argument nach (Mult), so fällt zunächst die <u>additive</u> Beziehung

$$\boxed{\binom{n+1/2}{k}=\binom{n-1/2}{k-1}+\binom{n-1/2}{k}}. \qquad \text{(Add/2)}$$

auf.

$$\boxed{\tbinom{-3/2}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{-3/2}{1}=\tfrac{-3}{2}} \quad \boxed{\tbinom{-3/2}{2}=\tfrac{15}{8}} \quad \boxed{\tbinom{-3/2}{3}=\tfrac{-35}{16}}$$

$$\boxed{\tbinom{-1/2}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{-1/2}{1}=\tfrac{-1}{2}} \quad \boxed{\tbinom{-1/2}{2}=\tfrac{3}{8}} \quad \boxed{\tbinom{-1/2}{3}=\tfrac{-5}{16}} \quad \boxed{\tbinom{-1/2}{4}=\tfrac{35}{128}}$$

$$\boxed{\tbinom{1/2}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{1/2}{1}=\tfrac{1}{2}} \quad \boxed{\tbinom{1/2}{2}=\tfrac{-1}{8}} \quad \boxed{\tbinom{1/2}{3}=\tfrac{1}{16}} \quad \boxed{\tbinom{1/2}{4}=\tfrac{-5}{128}} \quad \boxed{\tbinom{1/2}{5}=\tfrac{7}{256}}$$

$$\boxed{\tbinom{3/2}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{3/2}{1}=\tfrac{3}{2}} \quad \boxed{\tbinom{3/2}{2}=\tfrac{3}{8}} \quad \boxed{\tbinom{3/2}{3}=\tfrac{-1}{16}} \quad \boxed{\tbinom{3/2}{4}=\tfrac{3}{128}} \quad \boxed{\tbinom{3/2}{5}=\tfrac{-3}{256}} \quad \boxed{\tbinom{3/2}{6}=\tfrac{7}{1024}}$$

Allerdings scheint man mit (Add/2) nicht so viel anfangen zu können wie mit (Add), da man mit (Add/2) alleine nicht das obige Zahlenschema rekonstruieren kann.

Sehen wir uns die multiplikativen Zusammenhänge lokal an. Für ganzzahlige obere Argumente hat man

$$\boxed{\tbinom{0}{0}=1}$$
$$\cdot\tfrac{1}{1}$$
$$\boxed{\tbinom{1}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{1}{1}=1}$$
$$\cdot\tfrac{2}{2} \quad \cdot\tfrac{2}{1}$$
$$\boxed{\tbinom{2}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{2}{1}=2} \quad \boxed{\tbinom{2}{2}=1}$$
$$\cdot\tfrac{3}{3} \quad \cdot\tfrac{3}{2} \quad \cdot\tfrac{3}{1}$$
$$\boxed{\tbinom{3}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{3}{1}=3} \quad \boxed{\tbinom{3}{2}=3} \quad \boxed{\tbinom{3}{3}=1}$$
$$\cdot\tfrac{4}{4} \quad \cdot\tfrac{4}{3} \quad \cdot\tfrac{4}{2} \quad \cdot\tfrac{4}{1}$$
$$\boxed{\tbinom{4}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{4}{1}=4} \quad \boxed{\tbinom{4}{2}=6} \quad \boxed{\tbinom{4}{3}=4} \quad \boxed{\tbinom{4}{4}=1}$$
$$\cdot\tfrac{5}{5} \quad \cdot\tfrac{5}{4} \quad \cdot\tfrac{5}{3} \quad \cdot\tfrac{5}{2} \quad \cdot\tfrac{5}{1}$$
$$\boxed{\tbinom{5}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{5}{1}=5} \quad \boxed{\tbinom{5}{2}=10} \quad \boxed{\tbinom{5}{3}=10} \quad \boxed{\tbinom{5}{4}=5} \quad \boxed{\tbinom{5}{5}=1}$$
$$\cdot\tfrac{6}{6} \quad \cdot\tfrac{6}{5} \quad \cdot\tfrac{6}{4} \quad \cdot\tfrac{6}{3} \quad \cdot\tfrac{6}{2} \quad \cdot\tfrac{6}{1}$$
$$\boxed{\tbinom{6}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{6}{1}=6} \quad \boxed{\tbinom{6}{2}=15} \quad \boxed{\tbinom{6}{3}=20} \quad \boxed{\tbinom{6}{4}=15} \quad \boxed{\tbinom{6}{5}=6} \quad \boxed{\tbinom{6}{6}=1}$$
$$\cdot\tfrac{7}{7} \quad \cdot\tfrac{7}{6} \quad \cdot\tfrac{7}{5} \quad \cdot\tfrac{7}{4} \quad \cdot\tfrac{7}{3} \quad \cdot\tfrac{7}{2} \quad \cdot\tfrac{7}{1}$$
$$\boxed{\tbinom{7}{0}=0} \quad \boxed{\tbinom{7}{1}=7} \quad \boxed{\tbinom{7}{2}=21} \quad \boxed{\tbinom{7}{3}=35} \quad \boxed{\tbinom{7}{4}=35} \quad \boxed{\tbinom{7}{5}=21} \quad \boxed{\tbinom{7}{6}=7} \quad \boxed{\tbinom{7}{7}=0}$$
$$\cdot\tfrac{8}{8} \quad \cdot\tfrac{8}{7} \quad \cdot\tfrac{8}{6} \quad \cdot\tfrac{8}{5} \quad \cdot\tfrac{8}{4} \quad \cdot\tfrac{8}{3} \quad \cdot\tfrac{8}{2} \quad \cdot\tfrac{8}{1}$$

Wegen (Mult) ist stets

$$\binom{n+1}{k}=\frac{n+1}{n+1-k}\cdot\binom{n}{k}, \qquad \text{(Mult lokal)}$$

so dass sich das in der Graphik angedeutete Multiplikationsschema ergibt.

Für halbzahlige obere Argumente ist analog

$$\boxed{\tbinom{-3/2}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{-3/2}{1}=\tfrac{-3}{2}} \quad \boxed{\tbinom{-3/2}{2}=\tfrac{15}{8}} \quad \boxed{\tbinom{-3/2}{3}=\tfrac{-35}{16}}$$
$$\cdot\tfrac{-1}{-1} \quad \cdot\tfrac{-1}{-3} \quad \cdot\tfrac{-1}{-5} \quad \cdot\tfrac{-1}{-7}$$
$$\boxed{\tbinom{-1/2}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{-1/2}{1}=\tfrac{-1}{2}} \quad \boxed{\tbinom{-1/2}{2}=\tfrac{3}{8}} \quad \boxed{\tbinom{-1/2}{3}=\tfrac{-5}{16}} \quad \boxed{\tbinom{-1/2}{4}=\tfrac{35}{128}}$$
$$\cdot\tfrac{1}{1} \quad \cdot\tfrac{1}{-1} \quad \cdot\tfrac{1}{-3} \quad \cdot\tfrac{1}{-5} \quad \cdot\tfrac{1}{-7}$$
$$\boxed{\tbinom{1/2}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{1/2}{1}=\tfrac{1}{2}} \quad \boxed{\tbinom{1/2}{2}=\tfrac{-1}{8}} \quad \boxed{\tbinom{1/2}{3}=\tfrac{1}{16}} \quad \boxed{\tbinom{1/2}{4}=\tfrac{-5}{128}} \quad \boxed{\tbinom{1/2}{5}=\tfrac{7}{256}}$$
$$\cdot\tfrac{3}{3} \quad \cdot\tfrac{3}{1} \quad \cdot\tfrac{3}{-1} \quad \cdot\tfrac{3}{-3} \quad \cdot\tfrac{3}{-5} \quad \cdot\tfrac{3}{-7}$$
$$\boxed{\tbinom{3/2}{0}=1} \quad \boxed{\tbinom{3/2}{1}=\tfrac{3}{2}} \quad \boxed{\tbinom{3/2}{2}=\tfrac{3}{8}} \quad \boxed{\tbinom{3/2}{3}=\tfrac{-1}{16}} \quad \boxed{\tbinom{3/2}{4}=\tfrac{3}{128}} \quad \boxed{\tbinom{3/2}{5}=\tfrac{-3}{256}} \quad \boxed{\tbinom{3/2}{6}=\tfrac{7}{1024}}$$
$$\cdot\tfrac{5}{5} \quad \cdot\tfrac{5}{3} \quad \cdot\tfrac{5}{1} \quad \cdot\tfrac{5}{-1} \quad \cdot\tfrac{5}{-3} \quad \cdot\tfrac{5}{-5} \quad \cdot\tfrac{5}{-7}$$

Aufgabe: Wie lautet hier die zu (Mult lokal) analoge Formel?

8 Binomialkoeffizienten mit halbzahligen unteren Argumenten

Die letzten beiden Schemata waren disjunkt zueinander: Das vorletzte hatte nur ganzzahlige obere Argumente und das letzte nur halbzahlige. Will man beide Schemata miteinander verschmelzen, so wird man gleich auf das Problem geführt, dass man auch Binomialkoeffizienten mit halbzahligem unteren Argument braucht.

John Wallis hat sich wohl als erster mit diesem Problem beschäftigt (und zwar im Zusammenhang mit der Berechnung der Kreiszahl π).

Es erscheint als vielversprechend, sich an der multiplikativen Beziehung

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{\text{k Faktoren abwärts}}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}_{\text{k Faktoren aufwärts}}}\,. \tag{Mult}$$

zu orientieren, denn diese Formel erwies sich auch dann als anwendbar, wenn das obere Argument halbzahlig ist. Aber wie groß ist zum Beispiel $\binom{1}{1/2}$?[6]

Mit dem Ansatz $\binom{1}{1/2} = \frac{1!}{(1/2)!\cdot(1/2)!}$ kommt man nicht weiter, denn was $\left(\frac{1}{2}\right)!$ sein soll, ist ebenso unklar.

Um auf Ideen zu kommen, sehen wir uns die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für ganzzahlige Argumente noch einmal an.

$$\begin{array}{c}
\boxed{\tbinom{0}{0}=1}\\[1ex]
\boxed{\tbinom{1}{0}=1}\quad\boxed{\tbinom{1}{1}=1}\\[1ex]
\boxed{\tbinom{2}{0}=1}\quad\boxed{\tbinom{2}{1}=2}\quad\boxed{\tbinom{2}{2}=1}\\[1ex]
\boxed{\tbinom{3}{0}=1}\quad\boxed{\tbinom{3}{1}=3}\quad\boxed{\tbinom{3}{2}=3}\quad\boxed{\tbinom{3}{3}=1}\\[1ex]
\boxed{\tbinom{4}{0}=1}\quad\boxed{\tbinom{4}{1}=4}\quad\boxed{\tbinom{4}{2}=6}\quad\boxed{\tbinom{4}{3}=4}\quad\boxed{\tbinom{4}{4}=1}\\[1ex]
\boxed{\tbinom{5}{0}=1}\quad\boxed{\tbinom{5}{1}=5}\quad\boxed{\tbinom{5}{2}=10}\quad\boxed{\tbinom{5}{3}=10}\quad\boxed{\tbinom{5}{4}=5}\quad\boxed{\tbinom{5}{5}=1}\\[1ex]
\boxed{\tbinom{6}{0}=1}\quad\boxed{\tbinom{6}{1}=6}\quad\boxed{\tbinom{6}{2}=15}\quad\boxed{\tbinom{6}{3}=20}\quad\boxed{\tbinom{6}{4}=15}\quad\boxed{\tbinom{6}{5}=6}\quad\boxed{\tbinom{6}{6}=1}\\[1ex]
\boxed{\tbinom{7}{0}=1}\quad\boxed{\tbinom{7}{1}=7}\quad\boxed{\tbinom{7}{2}=21}\quad\boxed{\tbinom{7}{3}=35}\quad\boxed{\tbinom{7}{4}=35}\quad\boxed{\tbinom{7}{5}=21}\quad\boxed{\tbinom{7}{6}=7}\quad\boxed{\tbinom{7}{7}=1}
\end{array}$$

Was kann man außer (Add) und (Mult) dem Schema an Beziehungen entnehmen?

Zunächst hat man stets die Anfangsbelegung

$$\binom{n}{0} = 1\,, \tag{Anf}$$

die sich auch für negative oder halbzahlige Werte von n als sinnvoll erwies.

Ferner gilt für gewöhnliche Binomialkoeffizienten die Symmetriebeziehung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \tag{S}$$

sie macht zwar für negative Werte von n Probleme, aber diese werden im weiteren Verlauf nicht mehr benötigt.

---

[6] Die folgenden Ausführungen orientieren sich an Meyer [7], Kap. 9 (insbes. Kap. 9.5).

Im Schema fällt auf, dass die Einträge längs der zum gleichen unteren Argument gehörigen Diagonalen monoton wachsen. Es gilt sogar noch mehr: Für $k > 0$ ist stets

$$\binom{n+1}{k}^2 > \binom{n}{k} \cdot \binom{n+2}{k}, \qquad \text{(gM)}$$

wie man leicht nachrechnet. Diese Ungleichung kann man wegen $\binom{n+1}{k} > \sqrt{\binom{n}{k} \cdot \binom{n+2}{k}}$ auch die <u>Ungleichung des geometrischen Mittels</u> nennen (in der Fachliteratur wird sie „logarithmische Konvexität“ genannt).

Versuchen wir nun, ein um halbzahlige Argumente erweitertes Schema so auszufüllen, dass (Mult), (Anf) und (S) bestehen bleiben; später werden wir auch (gM) benötigen.

Dabei klären wir gar nicht, was ein Ausdruck wie $\binom{3/2}{1/2}$ überhaupt inhaltlich bedeuten soll; semantische Konkretisierungen wie $\binom{n}{k}$ als Anzahl der Möglichkeiten, bei n Ziehungen k Treffer zu haben, sind jedenfalls ausschließlich für natürliche n und k sinnvoll.

Trägt man nun alles ein, was man bisher weiß, so ergibt sich mit (Anf) und (S) das folgende Schema[7] (die freien Stellen sind noch unbekannt).

$$\boxed{\tbinom{0}{0}=1}$$

$$\boxed{\tbinom{1/2}{0}=1}\ \boxed{\tbinom{1/2}{1/2}=1}\ \boxed{\tbinom{1/2}{1}=\tfrac{1}{2}}\ \boxed{\tbinom{1/2}{3/2}=}\ \boxed{\tbinom{1/2}{2}=\tfrac{-1}{8}}\ \boxed{\tbinom{1/2}{5/2}=}$$

$$\boxed{\tbinom{1}{0}=1}\ \boxed{\tbinom{1}{1/2}=}\ \boxed{\tbinom{1}{1}=1}\ \boxed{\tbinom{1}{3/2}=}\ \boxed{\tbinom{1}{2}=0}\ \boxed{\tbinom{1}{5/2}=}$$

$$\boxed{\tbinom{3/2}{0}=1}\ \boxed{\tbinom{3/2}{1/2}=\tfrac{3}{2}}\ \boxed{\tbinom{3/2}{1}=\tfrac{3}{2}}\ \boxed{\tbinom{3/2}{3/2}=1}\ \boxed{\tbinom{3/2}{2}=\tfrac{3}{8}}\ \boxed{\tbinom{3/2}{5/2}=}\ \boxed{\tbinom{3/2}{3}=\tfrac{-1}{16}}$$

$$\boxed{\tbinom{2}{0}=1}\ \boxed{\tbinom{2}{1/2}=}\ \boxed{\tbinom{2}{1}=2}\ \boxed{\tbinom{2}{3/2}=}\ \boxed{\tbinom{2}{2}=1}\ \boxed{\tbinom{2}{5/2}=}\ \boxed{\tbinom{2}{3}=0}$$

$$\boxed{\tbinom{5/2}{0}=1}\ \boxed{\tbinom{5/2}{1/2}=\tfrac{15}{8}}\ \boxed{\tbinom{5/2}{1}=\tfrac{5}{2}}\ \boxed{\tbinom{5/2}{3/2}=\tfrac{5}{2}}\ \boxed{\tbinom{5/2}{2}=\tfrac{15}{8}}\ \boxed{\tbinom{5/2}{5/2}=1}\ \boxed{\tbinom{5/2}{3}=\tfrac{5}{16}}\ \boxed{\tbinom{5/2}{7/2}=}$$

$$\boxed{\tbinom{3}{0}=1}\ \boxed{\tbinom{3}{1/2}=}\ \boxed{\tbinom{3}{1}=3}\ \boxed{\tbinom{3}{3/2}=}\ \boxed{\tbinom{3}{2}=3}\ \boxed{\tbinom{3}{5/2}=}\ \boxed{\tbinom{3}{3}=1}\ \boxed{\tbinom{3}{7/2}=}$$

$$\boxed{\tbinom{7/2}{0}=1}\ \boxed{\tbinom{7/2}{1/2}=\tfrac{35}{16}}\ \boxed{\tbinom{7/2}{1}=\tfrac{7}{2}}\ \boxed{\tbinom{7/2}{3/2}=\tfrac{35}{8}}\ \boxed{\tbinom{7/2}{2}=\tfrac{35}{8}}\ \boxed{\tbinom{7/2}{5/2}=\tfrac{7}{2}}\ \boxed{\tbinom{7/2}{3}=\tfrac{35}{16}}\ \boxed{\tbinom{7/2}{7/2}=1}\ \boxed{\tbinom{7/2}{4}=\tfrac{35}{128}}$$

Viel gewonnen hat man so nicht: Weder erkennt man eine additive noch eine multiplikative Struktur!

Das ändert sich allerdings, wenn man dies Schema in zwei Schemata zerlegt: eines für ganzzahlige obere Argumente und eines für halbzahlige. Die unbekannten Werte sind getönt.

$$\boxed{\tbinom{1/2}{0}=1}\ \boxed{\tbinom{1/2}{1/2}=1}\ \boxed{\tbinom{1/2}{1}=\tfrac{1}{2}}\ \boxed{\tbinom{1/2}{3/2}=}\ \boxed{\tbinom{1/2}{2}=\tfrac{-1}{8}}$$

$$\swarrow\cdot\tfrac{3}{3}\quad \swarrow\cdot\tfrac{3}{2}\quad \swarrow\cdot\tfrac{3}{1}\quad \swarrow\cdot\tfrac{3}{0}\quad \swarrow\cdot\tfrac{3}{-1}$$

$$\boxed{\tbinom{3/2}{0}=1}\ \boxed{\tbinom{3/2}{1/2}=\tfrac{3}{2}}\ \boxed{\tbinom{3/2}{1}=\tfrac{3}{2}}\ \boxed{\tbinom{3/2}{3/2}=1}\ \boxed{\tbinom{3/2}{2}=\tfrac{3}{8}}\ \boxed{\tbinom{3/2}{5/2}=}\ \boxed{\tbinom{3/2}{3}=\tfrac{-1}{16}}$$

$$\swarrow\cdot\tfrac{5}{5}\quad \swarrow\cdot\tfrac{5}{4}\quad \swarrow\cdot\tfrac{5}{3}\quad \swarrow\cdot\tfrac{5}{2}\quad \swarrow\cdot\tfrac{5}{1}\quad \swarrow\cdot\tfrac{5}{0}\quad \swarrow\cdot\tfrac{5}{-1}$$

$$\boxed{\tbinom{5/2}{0}=1}\ \boxed{\tbinom{5/2}{1/2}=\tfrac{15}{8}}\ \boxed{\tbinom{5/2}{1}=\tfrac{5}{2}}\ \boxed{\tbinom{5/2}{3/2}=\tfrac{5}{2}}\ \boxed{\tbinom{5/2}{2}=\tfrac{15}{8}}\ \boxed{\tbinom{5/2}{5/2}=1}\ \boxed{\tbinom{5/2}{3}=\tfrac{5}{16}}$$

$$\swarrow\cdot\tfrac{7}{7}\quad \swarrow\cdot\tfrac{7}{6}\quad \swarrow\cdot\tfrac{7}{5}\quad \swarrow\cdot\tfrac{7}{4}\quad \swarrow\cdot\tfrac{7}{3}\quad \swarrow\cdot\tfrac{7}{2}\quad \swarrow\cdot\tfrac{7}{1}$$

$$\boxed{\tbinom{7/2}{0}=1}\ \boxed{\tbinom{7/2}{1/2}=\tfrac{35}{16}}\ \boxed{\tbinom{7/2}{1}=\tfrac{7}{2}}\ \boxed{\tbinom{7/2}{3/2}=\tfrac{35}{8}}\ \boxed{\tbinom{7/2}{2}=\tfrac{35}{8}}\ \boxed{\tbinom{7/2}{5/2}=\tfrac{7}{2}}\ \boxed{\tbinom{7/2}{3}=\tfrac{35}{16}}\ \boxed{\tbinom{7/2}{7/2}=1}$$

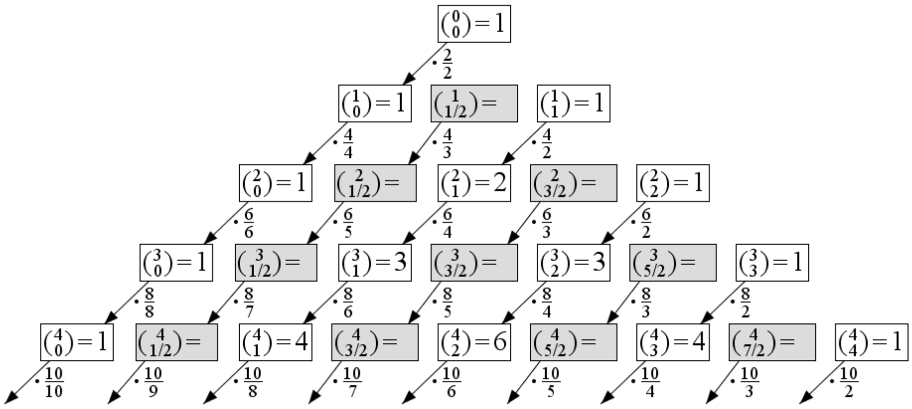
$$\swarrow\cdot\tfrac{9}{9}\quad \swarrow\cdot\tfrac{9}{8}\quad \swarrow\cdot\tfrac{9}{7}\quad \swarrow\cdot\tfrac{9}{6}\quad \swarrow\cdot\tfrac{9}{5}\quad \swarrow\cdot\tfrac{9}{4}\quad \swarrow\cdot\tfrac{9}{3}\quad \swarrow\cdot\tfrac{9}{2}$$

$$\boxed{\tbinom{9/2}{0}=1}\ \boxed{\tbinom{9/2}{1/2}=\tfrac{315}{128}}\ \boxed{\tbinom{9/2}{1}=\tfrac{9}{2}}\ \boxed{\tbinom{9/2}{3/2}=\tfrac{105}{16}}\ \boxed{\tbinom{9/2}{2}=\tfrac{63}{8}}\ \boxed{\tbinom{9/2}{5/2}=\tfrac{63}{8}}\ \boxed{\tbinom{9/2}{3}=\tfrac{105}{16}}\ \boxed{\tbinom{9/2}{7/2}=\tfrac{9}{2}}\ \boxed{\tbinom{9/2}{4}=\tfrac{315}{128}}\ \boxed{\tbinom{9/2}{9/2}=1}$$

$$\swarrow\cdot\tfrac{11}{11}\quad \swarrow\cdot\tfrac{11}{10}\quad \swarrow\cdot\tfrac{11}{9}\quad \swarrow\cdot\tfrac{11}{8}\quad \swarrow\cdot\tfrac{11}{7}\quad \swarrow\cdot\tfrac{11}{6}\quad \swarrow\cdot\tfrac{11}{5}\quad \swarrow\cdot\tfrac{11}{4}\quad \swarrow\cdot\tfrac{11}{3}\quad \swarrow\cdot\tfrac{11}{2}$$

[7] Die folgenden Ausführungen sind angelehnt an Scriba [10], S. 221 ff. Man vergleiche auch den Abschnitt über Wallis in Struik [12], S. 251 f.

Bei den halbzahligen oberen Argumenten wurden auch die Übergangsfaktoren mit verschwindendem Nenner aufgenommen; wird der Nenner kleiner als null, stimmen die Übergangsfaktoren wieder.



Man sieht mit Bedauern, dass die interpolierten Übergangsfaktoren keinen Rückschluss auf die noch fehlenden Werte zulassen. Man weiß immer noch nicht, wie groß $\binom{1}{1/2}$ ist!

9 Anwendung der Ungleichung des geometrischen Mittels

Die Frage war: Was soll eigentlich $\binom{1}{1/2}$ sein? Wir nennen diesen Wert x.

Wenn die Übergangsfaktoren sich wie in den beiden obigen Schemata interpolieren lassen, ergibt sich[8]

$$\binom{1}{1/2} = x\,;\quad \binom{2}{1/2} = \frac{4}{3}\cdot x\,;\quad \binom{3}{1/2} = \frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot x\,;\quad \binom{4}{1/2} = \frac{8}{7}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot x\,;\quad \ldots;\boxed{\binom{m}{1/2} = \frac{(2\cdot m)!!}{(2\cdot m-1)!!}\cdot\frac{x}{2}}.$$

Das hilft noch nicht viel weiter. Aber wir wissen mehr!

Wegen $\binom{1/2}{1/2} = 1$ gilt auch

$$\binom{1/2}{1/2} = 1;\quad \binom{3/2}{1/2} = \frac{3}{2};\quad \binom{5/2}{1/2} = \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2};\quad \binom{7/2}{1/2} = \frac{7}{6}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2};\quad \ldots;\boxed{\binom{(2\cdot m+1)/2}{1/2} = \frac{(2\cdot m+1)!!}{(2\cdot m)!!}}.$$

Sollte nun

$$\binom{n+1}{k}^2 > \binom{n}{k}\cdot\binom{n+2}{k}, \qquad \text{(gM)}$$

auch für andere Abstände im oberen Argument gelten, könnte man die Beziehung

$$\binom{n+1/2}{k}^2 > \binom{n}{k}\cdot\binom{n+1}{k}$$

für alle (auch halbzahligen) Werte von n vermuten.
Hieraus folgt einerseits

$$\binom{m}{1/2}^2 > \binom{(2\cdot m-1)/2}{1/2}\cdot\binom{(2\cdot m+1)/2}{1/2}$$

und andererseits

$$\binom{(2\cdot m+1)/2}{1/2}^2 > \binom{m}{1/2}\cdot\binom{m+1}{1/2}.$$

[8] Dabei sei etwa $8!! = 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2$ und $9!! = 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1$.

Setzt man die obigen Werte

$$\binom{m}{1/2} = \frac{(2\cdot m)!!}{(2\cdot m-1)!!}\cdot\frac{x}{2} \quad\text{und}\quad \binom{m+1}{1/2} = \frac{(2\cdot m+2)!!}{(2\cdot m+1)!!}\cdot\frac{x}{2}$$

sowie

$$\binom{(2\cdot m+1)/2}{1/2} = \frac{(2\cdot m+1)!!}{(2\cdot m)!!} \quad\text{und}\quad \binom{(2\cdot m-1)/2}{1/2} = \frac{(2\cdot m-1)!!}{(2\cdot m-2)!!}$$

ein, so bekommt man

$$8\cdot\left(\frac{(2\cdot m-1)!!}{(2\cdot m)!!}\right)^2\cdot\frac{m}{2}\cdot\sqrt{\frac{m+\frac{1}{2}}{m}} < x < 8\cdot\left(\frac{(2\cdot m-1)!!}{(2\cdot m)!!}\right)^2\cdot\frac{m}{2}\cdot\sqrt{\frac{m+\frac{1}{2}}{m+1}\cdot\frac{m+\frac{1}{2}}{m}}.$$

Nun gilt nach <u>Wallis</u> (Beweis siehe unten), dass

$$\boxed{\left(\frac{(2\cdot m-1)!!}{(2\cdot m)!!}\right)^2\cdot\frac{m}{2} \overset{m\to\infty}{\to} \frac{1}{2\cdot\pi}},$$

so dass insgesamt

$$x = \boxed{\binom{1}{1/2} = \frac{4}{\pi}}$$

folgt.

Aufgabe: Man überzeuge sich von der Richtigkeit aller Rechnungen.

Kennt man x, so sind natürlich auch alle anderen Binomialkoeffizienten mit $\frac{1}{2}$ als unterem Argument bekannt. Man hat also mit dem dargestellten Verfahren nicht nur eine einzige Zahl ausgerechnet.

Aufgabe: Wie groß ist $\binom{2}{3/2}$?

Aufgabe: Wenn man $\binom{1}{1/2}$ kennt, könnte man auf Ideen kommen, wie groß $\left(\frac{1}{2}\right)!$ ist.

10 Reflexion

Die in den letzten Abschnitten dargestellten Überlegungen könnten auch die Überschrift „Triumpf des Permanenzprinzips“ tragen. Es wurden fast keine inhaltlichen Überlegungen angestellt, sondern wir haben uns fast allein daran orientiert, wie die bei gewöhnlichen Binomialkoeffizienten zu beobachtenden Muster fortgesetzt werden können. Sinnfragen haben keine Rolle gespielt, sondern die Argumentation folgte grammatischen Reflexionen (Musterfortsetzung).
Man erkennt, dass eine <u>Spielerei auf der syntaktischen Ebene</u>, die semantisch zunächst gar nicht als berechtigt erscheint, offenbar zu einer neuen Einsicht führen kann. Das ist in der Mathematik häufig so gewesen; man denke etwa an die Entwicklung der Analysis, die zunächst auch nur auf der formalen Ebene „funktioniert“ hat. Wir halten fest, <u>dass die formale Struktur zu inhaltlichen Einsichten führen kann</u>, und werden dafür noch mehr Beispiele kennen lernen.
Bleiben wir beim Sinn eines Ausdrucks wie $\binom{1}{1/2}$. Die Definition eines Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ als Anzahl aller Möglichkeiten, aus n Elementen genau k auszuwählen, muss aufgegeben werden. Solche notwendigen Definitionsabänderungen kennt man schon von Überlegungen, was eigentlich $(-2)\cdot(-3)$ oder 2^{-3} „sein“ soll. Im Allgemeinen wird dazu das <u>Permanenzprinzip</u> verwendet, und dies besteht genau darin, dass eine syntaktische Regel, die nur in einem engen Bereich semantisch sinnvoll war, verabsolutiert wird.

Es ist aber nicht so, dass jede Anwendung des Permanenzprinzips erfolgreich ist; die Orientierung am Syntaktischen kann auch zu widersprüchlichen Ergebnissen führen!

Beispiel 1: Wie groß ist eigentlich 0^0? Man kann sich dieser Zahl auf verschiedene Arten nähern:
$0^1;\ 0^{1/2};\ 0^{1/3};\ 0^{1/4};\ 0^{1/5};\ 0^{1/6};\ \cdots$ oder $1^0;\ \left(\frac{1}{2}\right)^0;\ \left(\frac{1}{3}\right)^0;\ \left(\frac{1}{4}\right)^0;\ \left(\frac{1}{5}\right)^0;\ \left(\frac{1}{6}\right)^0;\ \cdots$.
Jedes Mal ist das Ergebnis anders.

Beispiel 2: Was ist eigentlich $\frac{0}{0}$? Wegen $\frac{3}{3}=\frac{2}{2}=\frac{1}{1}=?=\frac{-1}{-1}=\frac{-2}{-2}=\frac{-3}{-3}=1$ scheint das Ergebnis naheliegend zu sein (und ist trotzdem falsch)!

Beispiel 3: Schon die obige Fortsetzung der Binomialkoeffizienten nach rechts oben zeigte, dass die Deutung als geometrische Reihe nicht allgemein richtig sein konnte.

Andererseits kann die Orientierung an Mustern, also am Syntaktischen, durchaus zu fruchtbaren Erkenntnissen führen! Man muss sich nur um eine semantische Absicherung bemühen.

Die binomische Formel hat sich als überraschend fruchtbar herausgestellt. „Die für uns wichtigsten Aspekte der Dinge sind durch ihre Einfachheit und Alltäglichkeit verborgen. Die eigentlichen Grundlagen seiner Forschung fallen dem Menschen gar nicht auf. Es sei denn, daß ihm *dies* einmal aufgefallen ist. – Und das heißt: das, was, einmal gesehen, das Auffallendste und Stärkste ist, fällt uns nicht auf.“[9]

Das Motto hätte auch sein können: „Den Sinn nicht in den Dingen suchen, sondern ihn hineinstecken!“ [10]

11 Ein erster heuristischer Weg zum Satz von Wallis[11]

Wir nehmen unseren Ausgangspunkt in der Formel von

Vieta 1593: $$\boxed{\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\ldots}.$$

(Dies war der erste unendliche Prozess in einer Formel!)

Zur Begründung:
Aufgrund der bekannten Beziehung $\sin 2\cdot\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ ist

$$\sin\varphi = 2\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2} = 2^2\cdot\sin\frac{\varphi}{2^2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2} = \ldots = 2^n\cdot\sin\frac{\varphi}{2^n}\cdot\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{\varphi}{2^i}.$$

Misst man φ im Bogenmaß, so ist $\frac{\sin\frac{\varphi}{m}}{\frac{\varphi}{m}} \overset{m\to\infty}{\to} 1$, also $2^n\cdot\sin\frac{\varphi}{2^n} \overset{n\to\infty}{\to} \varphi$.

Somit folgt $\frac{\sin\varphi}{\varphi}=\prod_{i=1}^{\infty}\cos\frac{\varphi}{2^i}$ und mit $\varphi=\frac{\pi}{2}$ insbesondere $\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{32}\cdot\ldots$.

Wegen der Halbwinkelformel $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ ist

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\quad \cos\frac{\pi}{16}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\quad \text{usw.},$$
und damit folgt die Formel von Vieta.

[9] Wittgenstein [13], I, 129
[10] Nietzsche [9], S. 238
[11] Wallis selber kam auf ganz anderen Wegen zu seinem Produkt; siehe etwa Scott [11], S. 26 ff.

Wie kann man hieraus die Wallis-Beziehung erhalten? Ein heuristischer Weg verläuft folgendermaßen; dabei wird immer die oben gewonnene Abschätzung $\boxed{\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}}$ für kleine x benutzt.

Es ist

$$\sqrt{2} = \sqrt{4-2} = 2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}} \approx 2\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}.$$

Diese Methode ist verallgemeinerbar. Gleichzeitig benutzen wir $\boxed{\sqrt{2} \approx \frac{3}{2}}$ und erhalten:

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx \sqrt{2+\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2} \text{ mit } \sqrt{14} = \sqrt{16-2} = 4\cdot\sqrt{1-\frac{1}{8}} \approx 4\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right) = \frac{15}{4} \text{ und daher } \boxed{\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx \frac{15}{8}}.$$

Ebenso:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \approx \sqrt{2+\frac{15}{8}} = \frac{\sqrt{62}}{4} \text{ mit } \sqrt{62} = \sqrt{64-2} = 8\cdot\sqrt{1-\frac{1}{32}} \approx 8\cdot\left(1-\frac{1}{64}\right) = \frac{63}{8} \text{ und daher}$$

$$\boxed{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \approx \frac{63}{32}}.$$

Man erkennt ein Schema:

$$\boxed{\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\ldots \approx \frac{3}{4}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{63}{64}\cdot\ldots = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdot\ldots}.$$

Links erscheint das Wallis-Produkt.
Dies ist natürlich kein Beweis für die Richtigkeit der Wallis-Aussage (wir haben nur mit Abschätzungen gearbeitet und diese auch noch iteriert!), aber es mag jetzt nicht mehr ganz so verwunderlich erscheinen, dass das Wallis-Produkt etwas mit π zu tun hat.

Aufgabe: Man vergleiche die Konvergenzgeschwindigkeiten der Formeln von Vieta und Wallis.

12 Ein zweiter heuristischer Weg zum Satz von Wallis

Die „Begründung" hier folgt Euler[12].

Ein Polynom f mit den Nullstellen $x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n$ hat die Darstellung $f(x) = a\cdot\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$.

Häufig (wie zum Beispiel im Folgenden) weiß man über den führenden Koeffizienten a nichts; dann empfiehlt sich die folgende Darstellung:

$$f(x) = a\cdot\prod_{i=1}^{n}(x-x_i) = a\cdot(-1)^n\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{x}{x_i}\right),$$

also

$$\boxed{f(x) = f(0)\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{x}{x_i}\right)}.$$

Wenn die obige Produktdarstellung auch für das Nichtpolynom Sinus zutrifft, so hat man

$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1\pm\frac{x}{k\cdot\pi}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\cdot\pi^2}\right)$$

bzw.

$$\boxed{\sin x = x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\cdot\pi^2}\right)}.$$

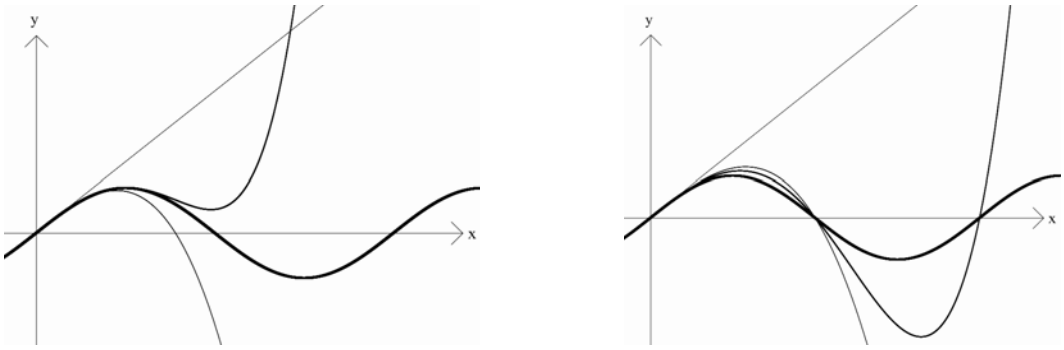
Diese Produktdarstellung des Sinus lässt sich tatsächlich streng beweisen[13].

[12] Euler [2], S. 147 f.
[13] Ein sehr einfacher Beweis findet sich in Boros / Moll [1], S. 127 f.

Aufgabe: Was ist an dem hier dargestellten „Beweis“ alles falsch?

Aufgabe: Mit der Produktdarstellung des Sinus lässt sich begründen, dass $\zeta(2)=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ ist.

Die zur Taylor-Entwicklung unterschiedliche Approximation des Sinusprodukts zeigt das folgende Bild (links Taylor; rechts Euler):



Es folgt

$$\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4\cdot k^2}\right)$$

bzw.

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4\cdot k^2-1}{4\cdot k^2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot k-1}{2\cdot k}\cdot\frac{2\cdot k+1}{2\cdot k}$$

und damit

$$\boxed{\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots}\,.$$

13 Ein exakter Weg zum Satz von Wallis[14]

Wir definieren

$$\boxed{w_{2\cdot m}:=\frac{(2\cdot m-1)!!}{(2\cdot m)!!}\cdot\sqrt{\frac{m}{2}}}$$

und

$$\boxed{I_n:=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n\cdot dx}\,.$$

Es ist $I_0=1$ und $I_{1/2}=\int_0^1\left(1-x^2\right)^{1/2}\cdot dx=\frac{\pi}{4}$ sowie $I_n=\frac{2\cdot n}{2\cdot n+1}\cdot I_{n-1}$ für $n>0$ (partielle Integration mit dem Faktor 1). Für $n\in\mathbb{N}$ folgt hieraus

$$I_n=\frac{(2\cdot n)!!}{(2\cdot n+1)!!}=\frac{1}{w_{2\cdot n}}\cdot\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2\cdot n+1}=\frac{1}{w_{2\cdot n}}\cdot\frac{n}{2\cdot n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot n}}$$

sowie

$$I_{(2\cdot n-1)/2}=\frac{(2\cdot n-1)!!}{(2\cdot n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}=w_{2\cdot n}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2\cdot n}}\,.$$

Die beiden letzten Formeln lassen einen starken Bezug zum Satz von Wallis vermuten.

[14] Eine gut lesbare alternative Vorgehensweise findet sich in Boros / Moll [1], S. 32 ff.

Für natürliche n war

$$I_n = \frac{1}{w_{2\cdot n}} \cdot \frac{n}{2\cdot n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot n}}$$

sowie

$$I_{(2\cdot n-1)/2} = w_{2\cdot n} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2\cdot n}}$$

und schließlich

$$I_{n-1} = \frac{2\cdot n+1}{2\cdot n} \cdot I_n = \frac{1}{w_{2\cdot n}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{2\cdot n}}.$$

Wegen der offensichtlichen Ungleichungskette

$$I_n < I_{(2\cdot n-1)/2} < I_{n-1}$$

ist

$$\frac{1}{w_{2\cdot n}} \cdot \frac{n}{2\cdot n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot n}} < w_{2\cdot n} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2\cdot n}} < \frac{1}{w_{2\cdot n}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{2\cdot n}}$$

und somit

$$\frac{2\cdot n}{2\cdot n+1} < w_{2\cdot n}^2 \cdot 2\cdot\pi < 1,$$

woraus

$$w_{2\cdot m} \overset{m\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}$$

folgt. Insbesondere konvergiert die Folge der Wallis-Terme.

Die Integrale $I_n := \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n \cdot dx$ können ganz unterschiedliche Gestalten haben.

Substituiert man $x = 2\cdot z - 1$, so ist

$$I_n = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} (1-x)^n \cdot (1+x)^n \cdot dx = 2^{2\cdot n} \cdot \int_0^1 z^n \cdot (1-z)^n \cdot dz.$$

Dies legt ein Studium der Integrale $\boxed{\beta(n, k) := \int_0^1 x^k \cdot (1-x)^{n-k} \cdot dx}$ nahe; es handelt sich um die Euler'schen Beta-Funktionen (s.u.), die die reziproken Binomialkoeffizienten interpoliert. Insbesondere ist $I_n = 2^{2\cdot n} \cdot \beta(2\cdot n,\ n)$.

Mit den Substitutionen $z = \cos x$ bzw. $z = \sin x$ kann I_n auch die Form

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x) \cdot dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) \cdot dx = I_{(n-1)/2}$$

annehmen.

14 Zur Beta-Funktion

Nun wird die folgende Frage exakt gelöst:

Was soll $\binom{n}{k}$ eigentlich sein, wenn k nicht natürlich ist? Lässt sich der Binomialkoeffizient als Funktion des unteren Arguments interpolieren?

Die Euler'sche Beta-Funktion wird definiert als[15]

$$\boxed{\beta(n,\, k) := \int_0^1 x^k \cdot (1-x)^{n-k} \cdot dx}.$$

Mit der Substitution $x = 1 - y$ folgt

$$\beta(n,\, k) = \beta(n,\, n-k)\,,$$

was sehr an Binomialkoeffizienten erinnert.

Mit partieller Integration gilt für $n > k$ und $k > -1$ der folgende Zusammenhang:

$$\beta(n,\, k) = \int_0^1 \underbrace{x^k}_{u'} \cdot \underbrace{(1-x)^{n-k}}_{v} \cdot dx = \frac{n-k}{k+1} \cdot \beta(n,\, k+1)\,,$$

der analog zur Rekursion $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k}$ bei Binomialkoeffizienten ist, aber bei der β-Funktion für alle (nicht nur natürliche) n und k gilt.

Ferner ist

$$\beta(n,\, 0) = \beta(n,\, n) = \frac{1}{n+1} \text{ für } n > -1$$

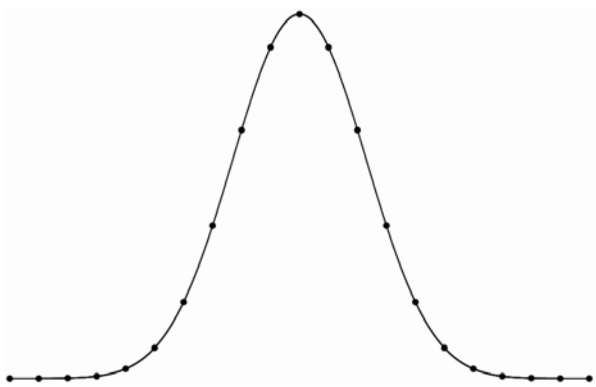
und insbesondere

$$\beta(0,\, 0) = 1\,.$$

Für ganzzahlige n und k folgt aus der Rekursion und den Randwerten die Beziehung

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\beta(n,\, k)}} \text{ für } n > -1 \text{ und } n \geq k\,.$$

Dies Resultat lässt sich graphisch gut darstellen[16] (die dicken Punkte gehören zu den Binomialkoeffizienten mit natürlichem unteren Argument).



Der Graph zeigt eine frappante Ähnlichkeit mit der Glockenkurve der Normalverteilung. Dieses ist allerdings überhaupt nicht verwunderlich, sondern genau die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes von de Moivre / Laplace[17].

---

[15] Wir benutzen das kleine β, um die Funktion von der Originaldefinition $B(a,\, b) = \int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} \cdot dx$ zu unterscheiden; auch die Argumentverteilung ist anders, nämlich auf unsere Zwecke zugeschnitten. Es ist $B(a,\, b) = \beta(a+b-2,\, a-1)$. Ergänzungen zur Beta-Funktion findet man etwa in Fichtenholz [3], S. 682 ff. und S. 691.
Die Beta-Funktion ist definiert für $n \geq -2$ und für $k \geq -1$. Dass das zugehörige Integral uneigentlich werden kann, wird zu keinen Komplikationen führen.

[16] Die Integrale sind nicht geschlossen auswertbar, können aber an ein Computer-Algebra-System wie Derive delegiert werden.

Es war $\beta(n, k) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Für natürliche n und k handelt es sich dabei um das harmonische Dreieck von Leibniz[18]:

$$\boxed{\beta(0, 0) = 1}$$

$$\boxed{\beta(1, 0) = \frac{1}{2}} \qquad \boxed{\beta(1, 1) = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\beta(2, 0) = \frac{1}{3}} \qquad \boxed{\beta(2, 1) = \frac{1}{6}} \qquad \boxed{\beta(2, 2) = \frac{1}{3}}$$

$$\boxed{\beta(3, 0) = \frac{1}{4}} \qquad \boxed{\beta(3, 1) = \frac{1}{12}} \qquad \boxed{\beta(3, 2) = \frac{1}{12}} \qquad \boxed{\beta(3, 3) = \frac{1}{4}}$$

Mit Hilfe der für $n > k$ und $k > -1$ oben bewiesenen Rekursion

$$\boxed{\beta(n, k+1) = \frac{k+1}{n-k} \cdot \beta(n, k)}$$

bekommt man aus

$$\beta(n+1, k) = \int_0^1 x^{k-1} \cdot \left(1-(1-x)\right) \cdot (1-x)^{n+1-k} \cdot dx = \int_0^1 x^{k-1} \cdot (1-x)^{n+1-k} \cdot dx - \int_0^1 x^{k-1} \cdot (1-x)^{n+2-k} \cdot dx$$

$$= \beta\left(n, k-1\right) - \beta\left(n+1, k-1\right) = \frac{n+1-k}{k} \cdot \beta(n, k) + \frac{n+2-k}{k} \cdot \beta(n+1, k)$$

eine weitere Rekursion, nämlich

$$\boxed{\beta(n+1, k) = \frac{n+1-k}{n+2} \cdot \beta(n, k)},$$

woraus auch

$$\beta(n+1, k+1) = \frac{k+1}{n+2} \cdot \beta(n, k)$$

folgt.

Zum Abschluss sollen einige Beta-Werte für Argumente, die keine natürlichen Zahlen sind, berechnet werden. Einfach ist

$$\beta\left(-1, -\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}},$$

denn mit der Substitution $x = \sin^2 t$ folgt

$$\beta\left(-1, -\frac{1}{2}\right) = \pi,$$

und mit Hilfe der obigen Rekursionen gewinnt man die Werte

$$\beta\left(-1, \frac{1}{2}\right) = -\pi, \quad \beta\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \beta\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Aufgabe: Man vollziehe die Rechnungen nach.

Aufgabe: Man berechne nun alle noch interessierenden Werte der Binomialkoeffizienten.

Aufgabe: Man experimentiere mit einem Computer-Algebra-System, wie man die Werte der Beta-Funktion erhält.

Aufgabe: Die Gamma-Funktion interpoliert in analoger Weise die Fakultäten. Man lese die Eigenschaften der Gamma-Funktion und deren Verhältnis zur Beta-Funktion in einem Analysis-(Hochschul-)Buch nach, etwa bei Fichtenholz [3], S. 682 ff. (man muss überhaupt nicht die 681 Seiten davor gelesen haben!).

---

[17] Meyer [8], S. 18 – 22.
[18] Siehe etwa Hilton / Holton / Pedersen [6], S. 207 und S. 215.

Literatur

Boros / Moll [1]:	Irresistible integrals. 2004 Cambridge: Cambridge University Press.
Euler, Leonhard [2]:	Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Erster Teil. 1983 Berlin usw.: Springer (Reprint von 1885; Original von 1748).
Fichtenholz, Gregor [3]:	Differential- und Integralrechnung 2. ^{10}1990 Thun usw.: Verlag Harri Deutsch.
Graham / Knuth / Patashnik [4]:	Concrete mathematics. ^{2}1994 Reading: Addison-Wesley.
Hairer / Wanner [5]:	Analysis by its history. 1996 New York: Springer.
Hilton / Holton / Pedersen [6]:	Mathematical reflections. 1997 New York usw.: Springer Verlag.
Meyer, Jörg [7]:	Schulnahe Beweise zum zentralen Grenzwertsatz. 2004 Hildesheim: Verlag Franzbecker.
Meyer, Jörg [8]:	Der Satz von de Moivre / Laplace als Aussage über Binomialkoeffizienten. In: Stochastik in der Schule **25**, Heft 3, S. 18 – 22 (2005).
Nietzsche, Friedrich [9]:	Nachgelassene Fragmente (Sommer 1886 – Frühjahr 1887). Kritische Studienausgabe (dtv Band 12).
Scriba, Christoph [10]:	Von Pascals Dreieck zu Eulers Gamma-Funktion ... In: Dauben, J. W. (Hrg.): Mathematical perspectives. 1981 New York: Academic Press.
Scott, J. F. [11]:	The mathematical work of John Wallis. New York: Chelsea 1981 (Nachdruck von 1938).
Struik, D. J. [12]:	A source book in mathematics 1200-1800. 1969 Cambridge: Harvard University Press.
Wittgenstein, Ludwig [13]:	Philosophische Untersuchungen.

Dr. Jörg Meyer
Schäfertrift 16
31789 Hameln
J.M.Meyer@t-online.de