Hans Walser

Verquere Schülerfragen

Die „blöden“ Schülerfragen werden gerne überhört. Sie passen nicht ins Konzept und schon gar nicht in Lehrplan und Standards. Sie zwingen zum Nachdenken, und das braucht Zeit. Für die Lehrperson stellt sich dabei als Einstiegsproblem, die Terminologie der Frage zu verstehen und mit den in der Fachwissenschaft üblichen Definitionen abzugleichen.

Die Schülerfrage, ob es eine Ellipse mit *drei* Brennpunkten gäbe, stellt zunächst die eigenen tradierten Vorstellungen über Kegelschnitt, Reflexion und Spiegelungsgeometrie in Frage. Welcher der verschiedenen Zugänge zum Begriff Ellipse ist der richtige, um diese Schülerfrage anzugehen? Es zeigt sich, dass es durchaus sinnvolle Verallgemeinerungen gibt, und überraschenderweise führen sie zu scheinbar fern liegenden Bereichen wie zum Beispiel der Statistik. Und plötzlich sieht man auch einen einfachen geometrisch-physikalischen Zugang zum Brechungsgesetz. Es ist faszinierend, auf diese Weise den „Alten“ aus der Frühzeit der Naturwissenschaften auf die Schliche zu kommen.

Für den Nachvollzug der folgenden Überlegungen sind ein CAS (Computer Algebra System) sowie ein DGS (Dynamische Geometrie Software) hilfreich. Ebenso wird ein gewisses handwerkliches Geschick für den Modellbau geschult.

1. Problemlösen und Problemfinden

An unseren Schulen hat „Problemlösen“ mittlerweile schon Kultstatus erreicht; eine ganze pädagogische Industrie lebt davon. Viel spannender als das Lösen vorgegebener Probleme ist jedoch das Auffinden und Bearbeiten eigener Probleme. Erstaunlich, dass es dafür keine Kultur gibt.

Mir scheint es wichtig, bei Fragen von Studierenden genau hinzuhören, insbesondere, wenn die Frage scheinbar sinnlos ist. Der Auslöser zu den folgenden Überlegungen war die Frage eines Studierenden: Gibt es eine Ellipse mit *drei* Brennpunkten?

Aufgabe 1: Gibt es weitere „dumme“ Fragen und Bemerkungen zum Thema *Dreiheit*?

2. Gewöhnliche Ellipse

2.1 Zwei Konzepte

Um die Frage nach einer „Ellipse“ mit drei Brennpunkten anzugehen, denken wir zunächst über die gewöhnliche Ellipse mit zwei Brennpunkten nach. Dazu stellen sich zwei Assoziationen ein:

1) Die „Gärtnerkonstruktion“: Die Ellipse ist die Menge aller Punkte, deren Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten (den Brennpunkten) konstant ist. Diese Definition kann mit einer Schnur visualisiert werden, welche an beiden Enden an der Tafel so fixiert ist, dass sie etwas lose hängt. Straffspannen mit der Kreide und Bewegen der Kreide ergibt die Ellipse. — Bei dieser Definition ist nicht ersichtlich, warum die beiden Punkte als „Brennpunkte“ bezeichnet werden.

2) Die Reflexionseigenschaft: Strahlen, welche vom einen Brennpunkt ausgehen, werden an der Ellipse so reflektiert, dass der reflektierte Strahl durch den anderen Brennpunkt verläuft.

Welches der beiden Konzepte ist passend für eine Verallgemeinerung auf drei Brennpunkte? Gibt es eine Verallgemeinerung, welche mit beiden Konzepten verträglich ist?

2.2 Experiment zur Ellipse

Wir basteln eine Schablone einer Ellipse aus Karton oder Plexiglas mit gelochten Brennpunkten, langer Durchmesser etwa 20 cm (Abb. 1).

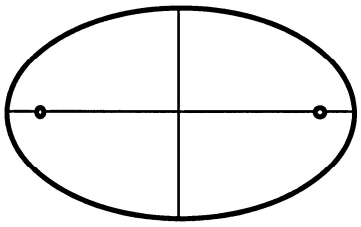


Abb. 1: Schablone mit Brennpunkten

An einem Brennpunkt wird ein etwa 2 cm breiter Streifen aus Papier oder Plastikfolie mit einer Mustertütenklammer befestigt. Dieser Streifen wird über den Rand der Schablone gebogen (Abb. 2). Er verläuft auf der Rückseite durch den anderen Brennpunkt. Durch das Loch in diesem Brennpunkt kann mit einem Stift auf dem Streifen eine Marke angebracht werden. Rückbiegen des Streifens und Nachmessen zeigt, dass auf dem Streifen gemessen der Abstand zwischen den beiden Brennpunkten immer gleich lang ist, nämlich so lang wie die lange Symmetrieachse der Ellipse.

Das Biegen über den Schablonenrand entspricht der Reflexion. Unser Modell zeigt also beide Aspekte der Ellipse.

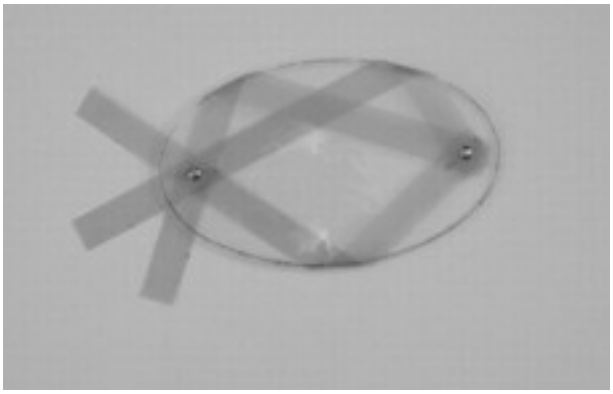


Abb. 2: Wie heißt dieser Fisch?

3. Pseudoellipse mit drei Brennpunkten

3.1 Abstandsdefinition

Die Abstandsdefinition der Ellipse lässt sich leicht verallgemeinern: Es soll nun die Summe der Abstände von *drei* Punkten konstant sein.

Wir finden solche Kurven mit den „Brennpunkten“ F_1, F_2, F_3 als Niveaulinien der Funktion:

$$z(P) = \left|\overline{F_1P}\right| + \left|\overline{F_2P}\right| + \left|\overline{F_3P}\right|$$

Also mit $F_1(x_1, y_1)$, $F_2(x_2, y_2)$, $F_3(x_3, y_3)$ und $P(x, y)$:

$$z(x,y) = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} + \sqrt{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2}$$

Die Frage allerdings, ob in diesen verallgemeinerten Kurven auch eine Reflexionseigenschaft gilt, ist subtil und bleibt vorderhand offen. Das Problem dabei ist, wie *drei* Strahlen simultan an einer Reflexion beteiligt sein können.

Beispiel: Zu den drei Punkten $F_1(0,1)$, $F_2(2,0)$, $F_3(3,3)$ (Abb. 3) zeichnen wir Niveaulinien der Funktion:

$$z(x,y)=\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

Technisches: Die Abbildung 3 wurde mit MuPAD (vgl: http://www.sciface.com/) mit folgendem Programm gezeichnet:

```
f:=(x,y)->sqrt(x^2+(y-1)^2)+sqrt((x-2)^2+y^2)+sqrt((x-3)^2+(y-3)^2):
Niveaus:=plot::Implicit2d(f(x,y), x = -1.5..4.5, y = -1.5..4.5, Contours = [$5.5..9 step 0.5],
LineColor=[0,0,0]):
Brennpunkte:=plot::PointList2d([[0,1], [2,0], [3,3]], PointSize=3,
PointColor=[0,0,0]):
plot(Niveaus, Brennpunkte,
Scaling=Constrained, TicksDistance=1,
TicksBetween=0,
Width=100, Height=100);
```

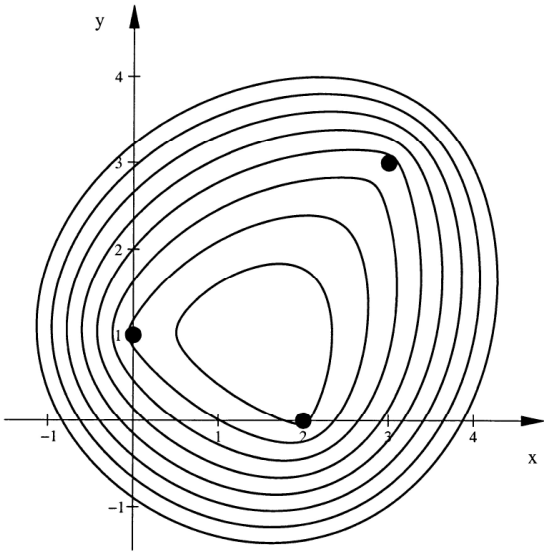


Abb. 3: Pseudoellipsen mit drei Brennpunkten

Aufgabe 2: Welcher Punkt liegt im „Zentrum“ der Abbildung 3?

Aufgabe 3: Lassen sich die Kurven der Abbildung 3 auch mit Hilfe einer Schnur konstanter Länge realisieren (analog zur Gärtnerkonstruktion)?

Aufgabe 4: Lassen sich diese Kurven auch mit dynamischer Geometrie-Software (DGS) zeichnen?

Aufgabe 5: Was ergibt sich, wenn die drei Brennpunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden?

Aufgabe 6: Mehr als drei Brennpunkte?

3.2 Pseudohyperbeln

Durch Einführen von Differenzen von Abständen erhalten wir verallgemeinerte Pseudohyperbeln. Im folgenden Beispiel ist $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, $F_3\left(0,-\frac{1}{3}\right)$ (Abb. 4). Die Abstände von P zu F_1 und zu F_2 werden addiert, der Abstand von P zu F_3 wird subtrahiert. Die Pseudohyperbeln sind also Niveaulinien der Funktion:

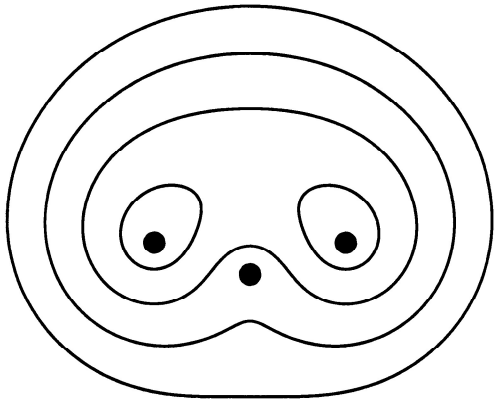


Abb. 4: Pseudohyperbeln

$$z(x,y)=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}-\sqrt{x^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}$$

Aufgabe 7: Was ergibt sich, wenn wir die Abstände gewichten, also zum Beispiel einen Abstand doppelt rechnen?

Aufgabe 8: Mehr als drei Brennpunkte?

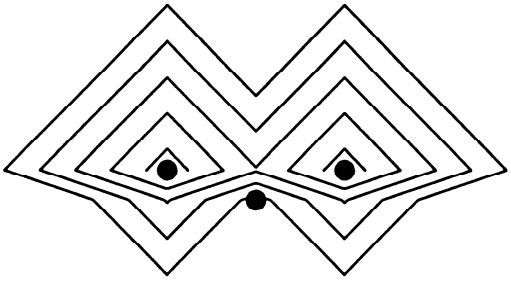


Abb. 5: Pseudohyperbeln

3.3 Taxi Cab Geometrie

Wir ersetzen für die Berechnung der Abstände von den Brennpunkten die übliche euklidische „PYTHAGORAS-Metrik“ $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ durch die Metrik $\Delta s = |\Delta x| + |\Delta y|$. Diese Metrik wird in der so genannten „Taxi Cab Geometry“ verwendet. Die Abbildung 5 zeigt obige Pseudohyperbeln in der Taxi Cab Geometry.

Die Pseudohyperbeln sind Niveaulinien der Funktion: z(x,y) = $(|x+1| + |y|) + (|x-1| + |y|) - (|x| + \left|y + \frac{1}{3}\right|)$

Aufgabe 9: Wie sehen gewöhnliche Ellipsen (mit nur 2 Brennpunkten) in der Taxi Cab Geometry aus?

Aufgabe 10: Wie sehen gewöhnliche Hyperbeln in der Taxi Cab Geometry aus?

Allgemein lässt sich diese Metrik so schreiben: $\Delta s = \sqrt[p]{|\Delta x|^p + |\Delta y|^p}$

Aufgabe 11: Wie sehen die Einheitskreise für verschiedene Werte von p aus?

Aufgabe 12: Wie sehen obige Pseudohyperbeln für verschiedene Werte von p aus?

So viel zur „Gärtnerkonstruktion“ mit den Abständen. Wenden wir uns nun der Reflexionseigenschaft zu.

4. Reflexion

4.1 Spiegelgeschichten

Sie hatte einen wunderbaren Spiegel; wenn sie vor den trat und sich darin beschaute, sprach sie: Spieglein, Spieglein an der Wand, wer ist die Schönste im ganzen Land? — so antwortete der Spiegel: Frau Königin, Ihr seid die Schönste im Land. Da war sie zufrieden, denn sie wusste, dass der Spiegel die Wahrheit sagte.

Grimm, Schneewittchen

Der Schuss in den Spiegel: Ein Cousin aus der Familiengeschichte schoss mit der Pistole auf sein eigenes Spiegelbild. Der Spiegel reflektierte das Geschoss. Treffer.

Schon ein Klassiker ist folgende Frage: Warum vertauscht ein Spiegel links und rechts, nicht aber oben und unten?

Großmutter erlebte, wie die Schwarzweiß-Photographie durch die Farbfotografie abgelöst wurde, der Schwarzweiß-Film durch den Farbfilm und das Schwarzweiß-Fernsehen durch Color-TV. Wann eigentlich wurde der Schwarz-Weiß-Spiegel durch den Farbspiegel abgelöst?

Aufgabe 13: Kennen Sie eine eigene Spiegelgeschichte?

Bei einer Spiegelung sind immer zwei Objekte beteiligt, das Urbild und das Spiegelbild. Das Spiegelbild des Spiegelbildes ist wieder das Urbild. Wie können nun *drei* Objekte an derselben Spiegelung beteiligt sein? Das Problem kann auch so formuliert werden: Bei einer Reflexion haben wir einen einfallenden und einen ausfallenden Strahl. Wie können *drei* Strahlen an einer Reflexion beteiligt sein? Um diese Frage anzugehen, untersuchen wir zunächst die übliche Reflexion, wie sie auch bei der gewöhnlichen Ellipse mit den Strahlen durch die beiden Brennpunkte erscheint.

4.2 Das Pferd will zur Tränke

Eine Kultaufgabe der Spiegelungsgeometrie: Ein Reiter möchte auf kürzestem Weg von F_1 nach F_2 reiten, dazwischen aber sein Pferd am Bach g trän-

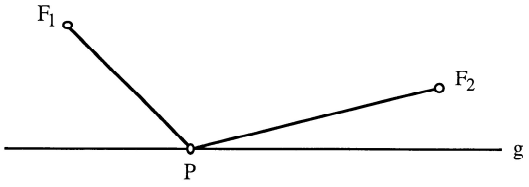


Abb. 6: Optimaler Weg?

ken (Abb. 6). Gesucht ist also der kürzeste Weg von F_1 nach F_2 über einen beliebigen Punkt P auf der Geraden g. Ein Optimierungsproblem also. Wir gehen dieses Problem auf verschiedene Weisen an.

Aufgabe 14: „Schulmäßige“ Lösung des Problems?

4.2.1 Faden und Plexiglas

Wir bohren in ein rechteckiges Plexiglas- oder Plastikstück (zum Beispiel transparenter 30cm-Maßstab) zwei Löcher in ungleichen Abständen von der Oberkante. Dann ziehen wir einen Faden durch das eine Loch und über die Oberkante von der Rückseite her durch das andere Loch (Abb. 7). Wenn wir die Enden des Fadens straff ziehen, ergibt sich zwischen den beiden Löchern der kürzeste Weg über die Oberkante.

Abb. 7: Kürzester Weg über die Oberkante

4.2.2 Dynamische Geometrie Software (DGS)

Wir wählen einen Punkt P auf g und tragen senkrecht zur Geraden g die Summe der Abstände $\left|\overline{F_1P}\right|$ und $\left|\overline{F_2P}\right|$ ab, und variieren dann P auf g. Der Endpunkt R der Abstandssumme beschreibt einen geometrischen Ort, der offensichtlich ein Minimum hat (Abb. 8, links). Wir verschieben den Punkt P in dieses Minimum (Abb. 8, rechts). Offenbar haben wir in dieser optimalen Situation gleiche Winkel zwischen g und F_1P beziehungsweise F_2P. Die Reflexionseigenschaft kommt ins Spiel.

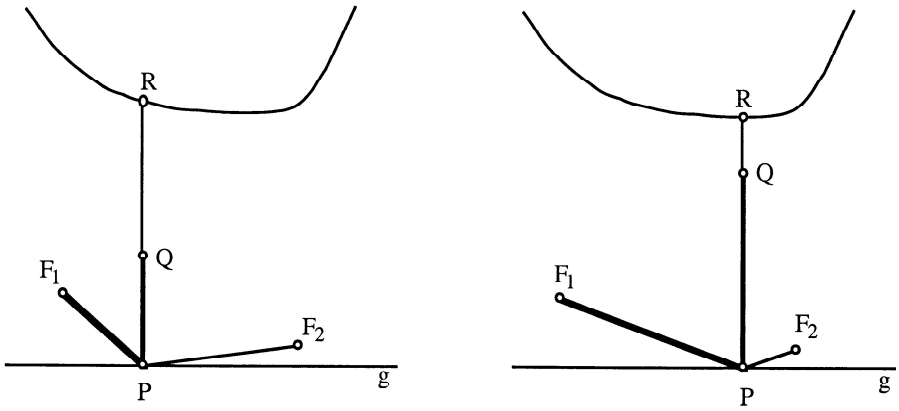


Abb. 8: Summe der Abstände, optimaler Punkt

Aufgabe 15: Welche Kurve beschreibt der Zwischenpunkt Q der Abstandssumme bei Variation von P?

4.2.3 Gerät zur Reflexion

Die Reflexion an einer Geraden g kann durch zwei gleich breite Halbstreifen dargestellt werden, die an einer Ecke gelenkig verbunden sind und mit der anderen Ecke auf der Geraden g gleiten (Abb. 9).

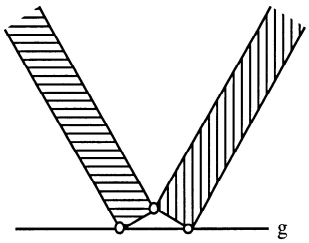


Abb. 9: Gelenkmodell

Die Gerade g ist die äußere Winkelhalbierende des Zwischenwinkels der beiden Halbstreifen. Das Gerät kann nun so in die Aufgabendisposition eingepasst werden, dass je ein Streifen durch F_1 beziehungsweise F_2 verläuft.

Aufgabe 16: Basteln Sie ein solches Gelenkmodell.

Aufgabe 17: Was ergibt sich, wenn wir mit ungleichen Streifenbreiten arbeiten?

4.2.4 Spiel mit Sinuswerten

In der Optik spielen bei der Lichtbrechung und Lichtreflexion die Sinuswerte der Winkel zwischen den Strahlen und der Normalen zu g eine Rolle. In der Abbildung 10 sind diese Sinuswerte in einem Einheitskreis eingezeichnet. Zusätzlich ist die Summe dieser Sinuswerte senkrecht zu g eingezeichnet. Wir sehen, dass diese Kurve genau im optimalen Fall die Gerade g schneidet. In diesem Fall ist die Summe der Sinuswerte null; wir haben entgegengesetzt gleiche Winkel bei P.

Überhaupt drängt sich der Verdacht auf, dass die untere Kurve die Ableitung der oberen Kurve darstellt.

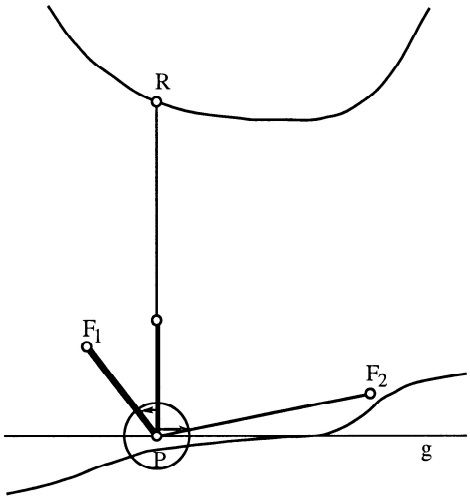


Abb. 10: Sinuswerte

Aufgabe 18: Wie lässt sich diese Vermutung beweisen?

Für die Reflexion gilt also: $\sin(\phi_1)+\sin(\phi_2)=0$. Diese Feststellung ist verallgemeinerungsfähig: Reflexion bei mehr als zwei Geraden bedeutet das Verschwinden der Summe der Sinuswerte aller Einfallswinkel:

$$\sin\phi_1 + ... + \sin\phi_n = \sum_{i=1}^{n} \sin\phi_i = 0$$

Damit können wir 4.2 auf mehr als zwei Anfangs- oder Endpunkte verallgemeinern.

4.3 Drei Punkte

Gesucht ist auf der Geraden g ein Punkt P so, dass die Summe der Abstände zu drei gegebenen Punkten F_1, F_2, F_3 minimal wird. Die Abbildung 11 zeigt die Situation.

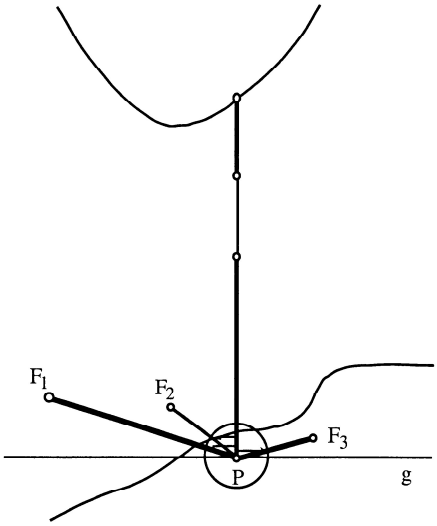


Abb. 11: Abstände zu drei Punkten

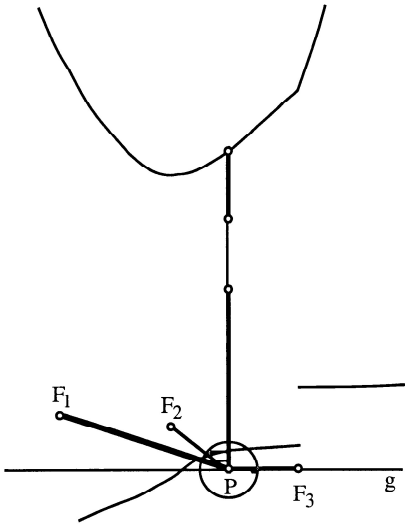


Abb. 12: Sonderfall

Aufgabe 19: Nach all dem, was wir oben alles besprochen haben, gilt somit bei den Pseudoellipsen mit drei Brennpunkten auch die Brennpunkteigenschaft. Welche Überlegungen müssen bei dieser Folgerung berücksichtigt werden?

Aufgabe 20: Mechanisches Gerät zur Darstellung der Reflexion mit *drei* beteiligten Strahlen?

4.3.1 Sonderfälle

Wir setzen einen der drei Brennpunkte auf die Gerade, zum Beispiel $F_3 \in g$ (Abb. 12). Die obere Kurve hat eine Knickstelle bei F_3, die Ableitung entsprechend eine Sprungstelle.

Aufgabe 21: Was geschieht, wenn wir alle Brennpunkte auf die Gerade g setzen?

5. Minimales Wegenetz im Dreieck

Zu drei Punkten F_1, F_2, F_3 suchen wir einen Verzweigungspunkt P so, dass das Wegenetz von P zu den drei Punkten minimale Gesamtlänge hat. Wir suchen also das Minimum der Funktion:

$$z(P) = \left|\overline{F_1P}\right| + \left|\overline{F_2P}\right| + \left|\overline{F_3P}\right| \quad \text{oder} \quad z(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$$

Beispiel: Zu den drei Punkten $F_1(0,1)$, $F_2(2,0)$, $F_3(3,3)$ suchen wir das Minimum der Funktion:

$$z(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$$

Die Niveaulinien führen uns, allerdings sehr unscharf, zum „innersten“ Punkt (Abb. 13).

Bevor wir weiter überlegen: der gesuchte Punkt ist der so genannte *FERMAT-Punkt* (PIERRE DE FERMAT, 1601 – 1665). Er kann rein geometrisch auf verschiedene Weise konstruiert werden (vgl. [1], S. 38/39, [4], S. 149, [5], p. 136 und [2] bzw. [3]).

Wir besprechen nun verschiedene Methoden, diesen FERMAT-Punkt zu finden.

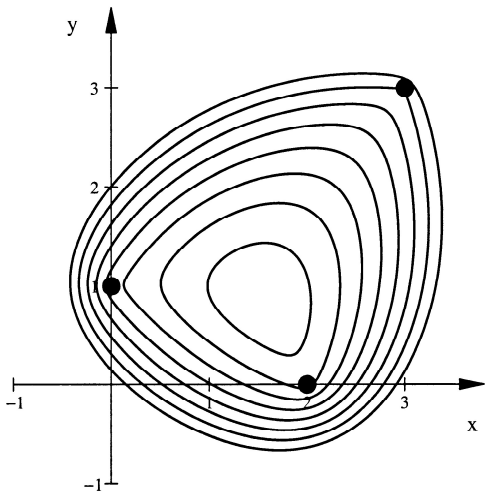


Abb. 13: Wo ist der „innerste“ Punkt?

5.1 Seifenlauge

Minimale Wegenetze können mit Hilfe von Seifenlauge dargestellt werden.

Rezept für die Seifenlauge: 1 Liter lauwarmes Wasser, 500 Gramm Zucker, 750 Gramm Neutralseife, 25 Gramm Tapetenkleister. Alles mischen, einen Tag stehen lassen. 9 Liter Wasser dazugeben, gut rühren.

Ferner benötigen wir ein Dreiecksmodell, das aus zwei parallelen Plexiglasscheiben mit etwa 1 cm Zwischenraum besteht; dabei werden die Eckpunkte des Dreieckes durch verbindende Stifte dargestellt. Dies kann durch Schrauben von ca. 3 mm Durchmesser realisiert werden; mit zusätzlichen Muttern und Kontermuttern kann der Abstand zwischen den Plexiglasscheiben justiert werden.

Wir tauchen das Plexiglasmodell kurz in die Seifenlösung. Beim Herausnehmen bildet sich ein Film zwischen den beiden Plexiglasscheiben und den die Eckpunkte des Dreieckes darstellenden Verbindungsschrauben. Dieser Film hat das Bestreben, sich möglichst dick zu machen. Daher müssen die anderen Dimensionen minimiert werden. Da der Scheibenabstand gegeben ist, kann nur noch die Dimension, welche den Wegelängen entspricht, minimiert werden. Die Praxis zeigt, dass diese Modelle recht gut funktionieren (Abb. 14).

Im FERMAT-Punkt, also dem Verzweigungspunkt, haben wir drei gleich große Winkel von je 120°.

Aufgabe 22: Wie sieht das minimale Wegenetz im Quadrat aus?

Aufgabe 23: Wie sieht das minimale Wegenetz in einem regelmäßigen Fünfeck aus?

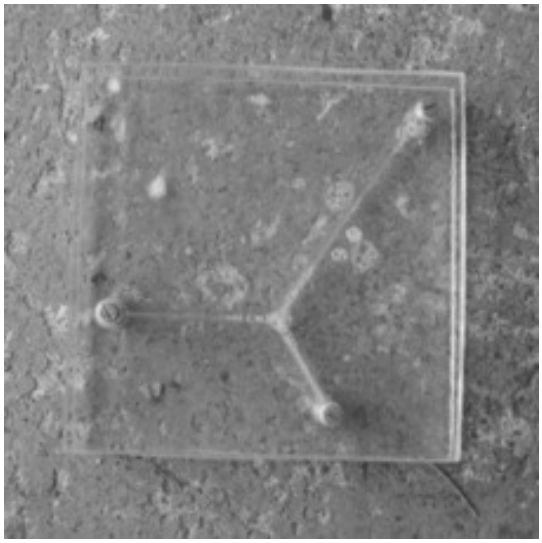


Abb. 14: FERMAT-Punkt

5.2 Schwerkraft

Wir bohren drei Löcher in einen kleinen Tisch, am besten mit Plexiglasplatte. Wir verknoten drei Fäden an einem Ende und ziehen die anderen Enden durch je ein Loch. Unterhalb der Tischplatte hängen wir an die drei Enden je ein gleich schweres Gewicht.

Der Schwerpunkt dieser drei Gewichte ist dann am tiefsten, wenn die Gesamtlänge der Fäden unterhalb der Tischplatte möglichst groß ist. Dies ist dann der Fall, wenn die Gesamtlänge der Wegespinne auf der Tischplatte minimal ist (Abb. 15).

Aufgabe 24: Geht es auch mit Analysis?

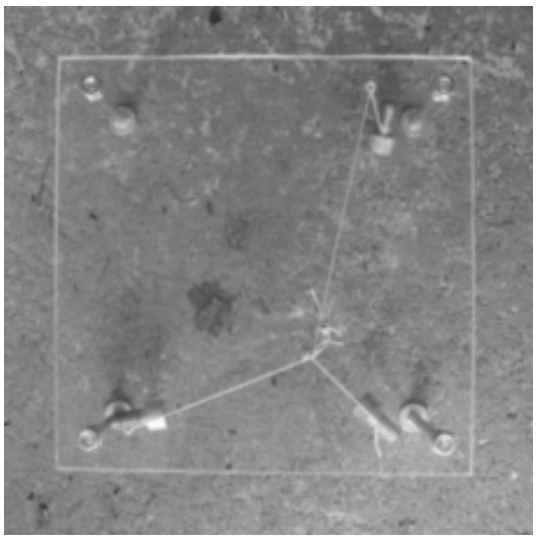


Abb. 15: Schwerkraft

6. Lösungshinweise zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 1: Beispiele:
- Waage mit drei Hebelarmen?
- Winkel mit drei Schenkeln?
- Dreikomponentenkleber?
- Dreiwertige Logik? — tertium non datur.
- Was sähe man mit drei Augen?
- Trisexuelle Fortpflanzung? Wie lauten dann die Mendelschen Vererbungsgesetze?
- Warum hat eine Überlandleitung drei Drähte oder ein Vielfaches davon?
- Warum verschwindet die Summe der dritten Einheitswurzeln?
- Warum hat der Mercedesstern drei Spitzen?

Zu Aufgabe 2: Der Punkt im „Zentrum“, also der Punkt mit dem tiefsten Niveau, hat die Eigenschaft, dass seine Abstandssumme zu den drei Brennpunkten minimal ist. Dies ist der so genannte *FERMAT-Punkt*. Wir kommen in Abschnitt 5 darauf zurück.

Zu Aufgabe 3: Die Abbildung 16 zeigt die schematische Schnurführung. Der Trick ist die *doppelte* Schnurführung, wie sie beispielsweise auch bei einem Baukran verwendet wird. Das Verfahren lässt sich auf beliebig viele Brennpunkte verallgemeinern.

Zu Aufgabe 4: Mir ist dies nicht gelungen. Man bräuchte den Schnittpunkt einer (gewöhnlichen) Ellipse mit einem Kreis, das geht zumindest in Cabri nicht (vgl. http://www.scientific-solutions.ch/de/prod/cabri.html).

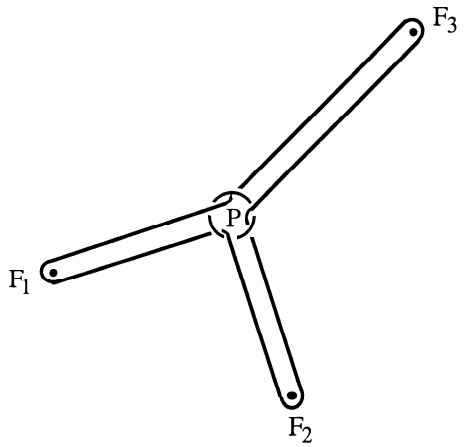


Abb. 16: Doppelte Schnurführung

Zu Aufgabe 5: Die Abbildung 17 zeigt die Situation mit drei Brennpunkten, welche ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Bemerkung: Die Pseudoellipse, welche genau durch die drei Brennpunkte geht, ist *kein* so genanntes REULEAUX-Dreieck, welches aus drei Kreisbögen bestünde. Optisch ist allerdings kein Unterschied auszumachen. Die Pseudoellipse verläuft innerhalb des „Reuleaux"-Dreieckes.

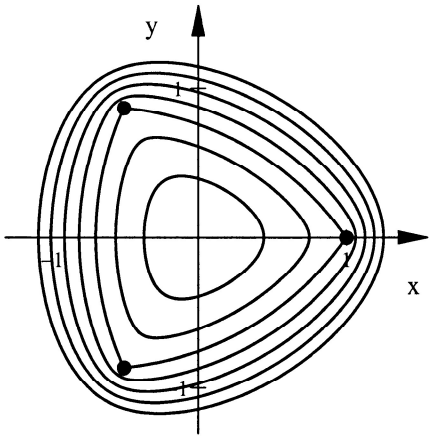


Abb. 17: Gleichseitiges Dreieck

Zu Aufgabe 6: Die Abbildung 18 zeigt exemplarisch die Situation mit vier Brennpunkten, welche ein Quadrat bilden.

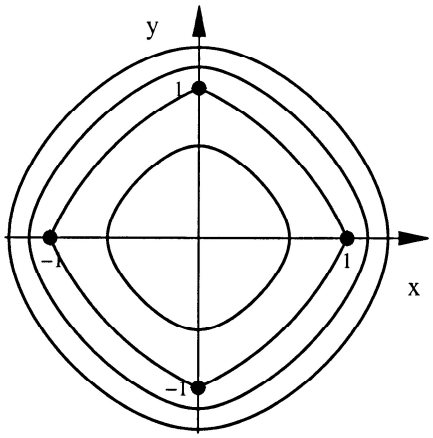


Abb. 18: Quadrat

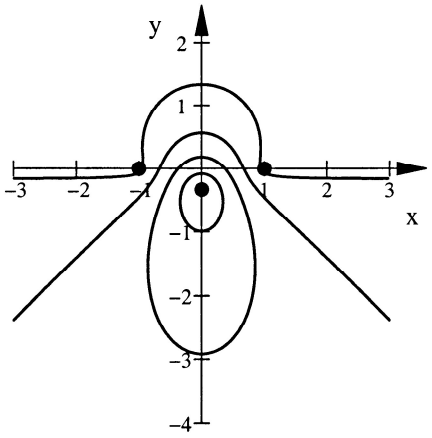
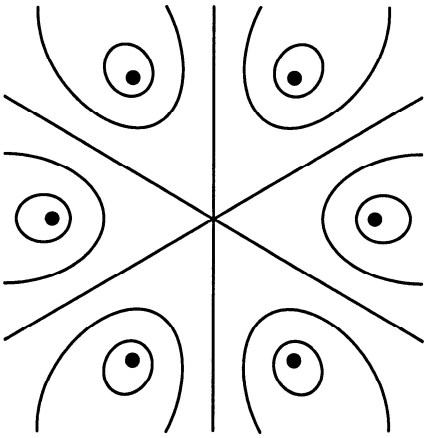


Abb. 19: Die Nase hat doppeltes Gewicht

Zu Aufgabe 7: In der Abbildung 19 ist der Abstand zur Nase doppelt gewichtet.

Zu Aufgabe 8: Die sechs Brennpunkte der Abbildung 20 bilden ein regelmäßiges Sechseck. Die Abstände sind im Wechsel positiv und negativ genommen.



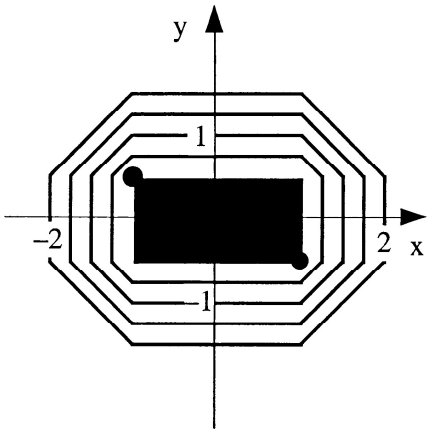


Abb. 20: Sechs Brennpunkte

Abb. 21: Konfokale Ellipsenschar

Zu Aufgabe 9: Die Abbildung 21 zeigt eine konfokale Ellipsenschar mit den beiden Brennpunkten (1|0,5) und (–1|0,5). Für die minimale Abstandssumme 3 erhalten wir nicht eine Linie, sondern ein Rechteck.

Zu Aufgabe 10: Die Abbildung 22 zeigt eine konfokale Hyperbelschar mit den beiden Brennpunkten (1|–0,5) und (–1|0,5).

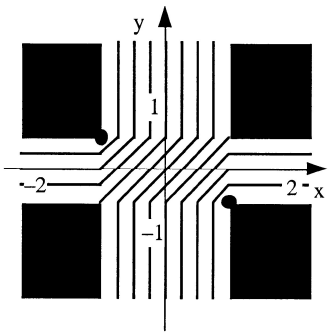


Abb. 22: Konfokale Hyperbelschar

Zu Aufgabe 11: Die Abbildung 23 zeigt die Einheitskreise für $p = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 10$. Mit Ausnahme des üblichen Kreises ($p = 2$) haben die Figuren nur die Symmetrien des Quadrates. Für $p = \frac{1}{2}$ erhalten wir die so genannte *Astroide*. Für $p \to \infty$ ergibt sich ein achsenparalleles Quadrat.

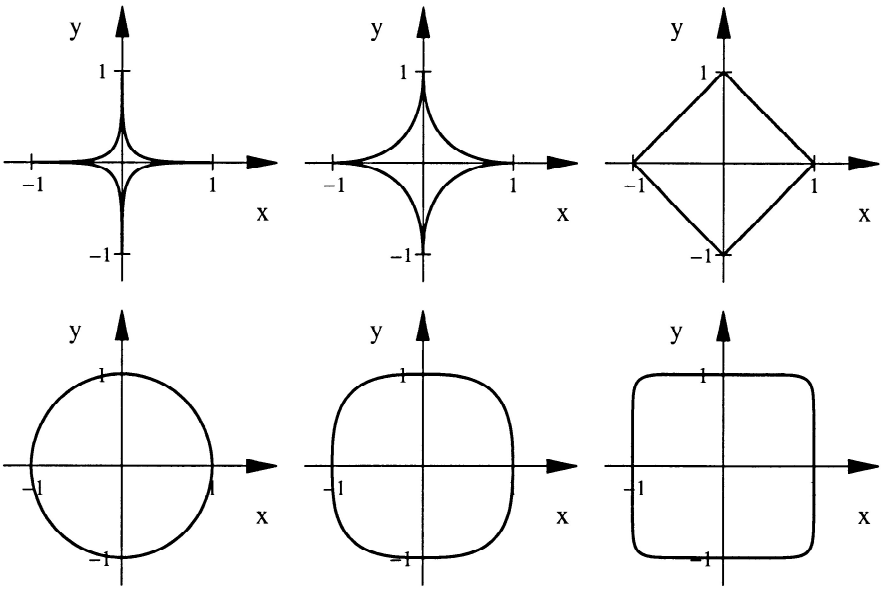


Abb. 23: Einheitskreise

Zu Aufgabe 12: Die Abbildung 24 zeigt Beispiele für $p = \frac{1}{2}$ und $p = 10$.

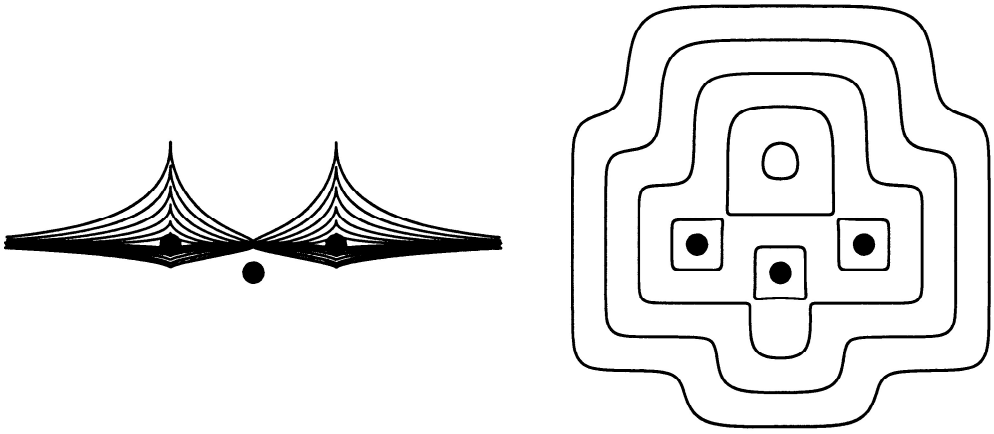


Abb. 24: Pseudohyperbeln

Zu Aufgabe 13: Offene Aufgabe.

Zu Aufgabe 14: Wir spiegeln F_2 an g und erhalten F_2' (Abb. 25). Die Strecke PF_2 ist gleich lang wie die Strecke PF_2'; der Streckenzug F_1PF_2 somit gleich lang wie der Streckenzug F_1PF_2'. Dieser ist aber am kürzesten, wenn P auf der Geraden F_1F_2' liegt. Damit haben wir gleiche Winkel bei P.

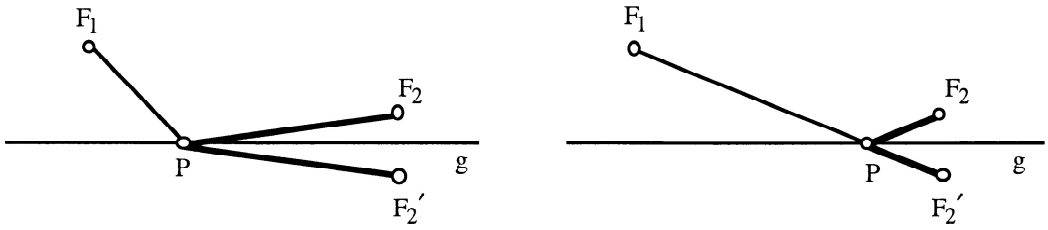


Abb. 25: Schulmäßige Lösung

Zu Aufgabe 15: Der Zwischenpunkt Q beschreibt eine gleichseitige Hyperbel.

Zu Aufgabe 16: Für die Gerade g kann ein Drahtstück (Abb. 26) oder eine Vorhangschiene verwendet werden.

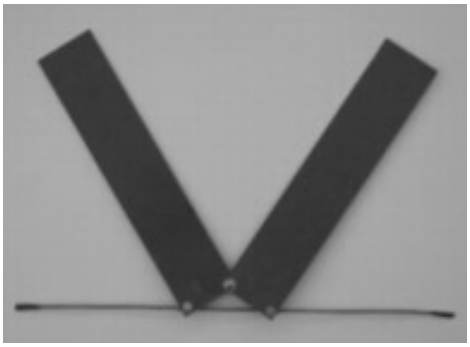


Abb. 26: Gelenkmodell

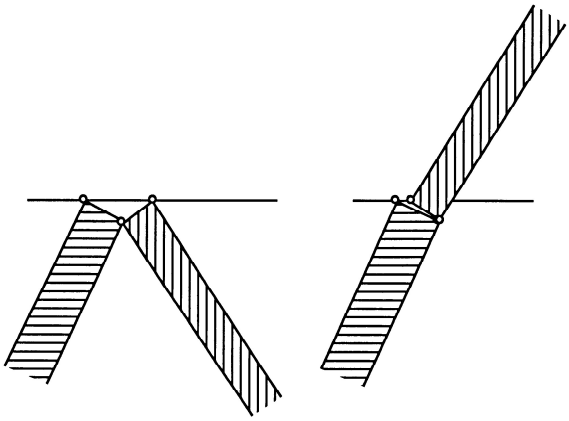


Abb. 27: Ungleiche Streifenbreiten

Zu Aufgabe 17: Ungleiche Streifenbreite: Wenn wir „überdrehen“ (Abb. 27 rechts), erhalten wir eine Illustration des Brechungsgesetzes von SNELLIUS (Willebrord van ROIJEN SNELL, 1580-1626). Der breitere Streifen ist im dichteren Medium. Lichtstrahlen, welche von der Luft ins Wasser gehen, werden im Wasser nach unten gebrochen.

Die Aufgabe in der Aufgabe: Bei einem ins Wasser getauchten Ruder scheint der Teil unter dem Wasserspiegel nach oben geknickt, obwohl das Wasser eine größere Dichte hat als die Luft. Warum ist das so? — Unser Hirn nimmt fälschlicherweise geradlinige Lichtstrahlen an. Um die in Wirklichkeit nach unten gebrochenen Lichtstrahlen zu kompensieren, wird das Ruder als nach oben gebrochen gesehen.

Zu Aufgabe 18: Wir setzen die x-Achse auf die Gerade g. Mit den Koordinaten $F_1(x_1, y_1)$, $F_2(x_2, y_2)$ und $P(x, 0)$ gehört die obere Kurve, welche die gesamte Weglänge darstellt, zur Funktion:

$$s(x) = \left|\overline{F_1P}\right| + \left|\overline{F_2P}\right| = \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}$$

Weiter erhalten wir für den Sinuswert des Winkels ϕ_i zwischen $\overline{F_iP}$ und der Normalen zu g:

$$\sin(\phi_i) = \frac{x - x_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + y_i^2}}$$

Nun ist aber:

$$\frac{d}{dx} s(x) = \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} + \frac{x - x_2}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}} = \sin(\phi_1) + \sin(\phi_2)$$

Damit haben wir den Link zwischen den Längenüberlegungen und den Winkelüberlegungen gefunden.

Zu Aufgabe 19: Die Pseudoellipsen mit drei Brennpunkten sind Niveaulinien der Abstandssummenfunktion. Wenn wir uns also infinitesimal auf einer Tangente an eine solche Pseudoellipse bewegen, bleibt die Funktion konstant und ihre Ableitung ist null. Die Ableitung ist aber die Summe der Sinuswerte der beteiligten Auftreffwinkel. Diese Überlegung lässt sich auf Pseudoellipsen mit beliebig vielen Brennpunkten verallgemeinern. Insbesondere gilt sie auch für gewöhnliche Ellipsen mit zwei Brennpunkten.

Zu Aufgabe 20: Das Gerät (Abb. 28) ist analog zum Gerät für nur zwei Strahlen.

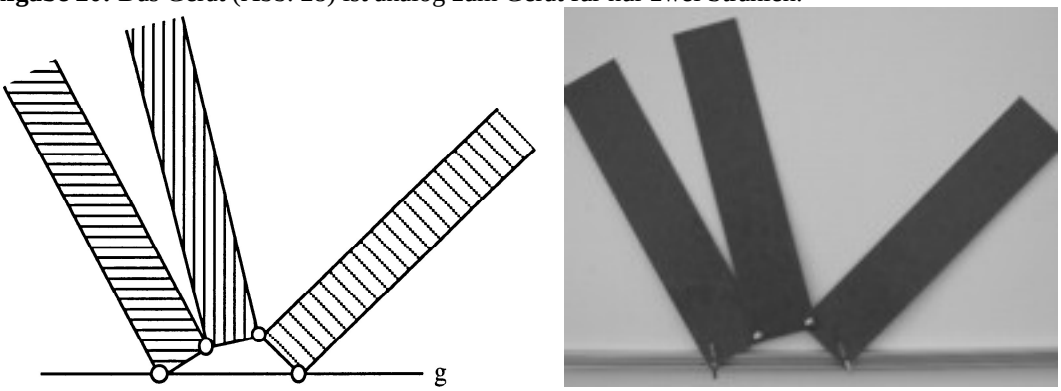


Abb. 28: Gelenkmodell

Aufgabe in der Aufgabe: Warum funktioniert dieses Modell? — Die Winkel der Streifen zur Normalen von g sind gleich den Winkeln der Unterkante der Streifen zur Geraden g. Wir sehen aus der Abbildung 29, dass die Summe der Sinuswerte null ist.

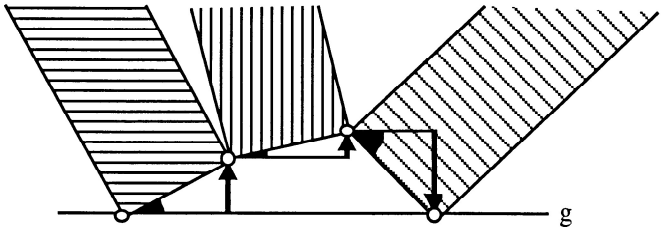


Abb. 29: Die Summe der Sinuswerte ist null

Zu Aufgabe 21: Die Kurve hat drei Knickstellen und ist stückweise gerade, die Ableitung ist stückweise konstant. Das Minimum ist bei F_2. Dieser Punkt sitzt zwischen F_1 und F_3, aber nicht in der Mitte. Wir müssen mit dem Median arbeiten. Damit haben wir einen Link zur Statistik.

Zu Aufgabe 22: Das minimale Wegenetz im Quadrat besteht nicht, wie man zunächst vermuten könnte, aus den beiden Diagonalen. Die Seifenlauge macht einen anderen Vorschlag (Abb. 31).

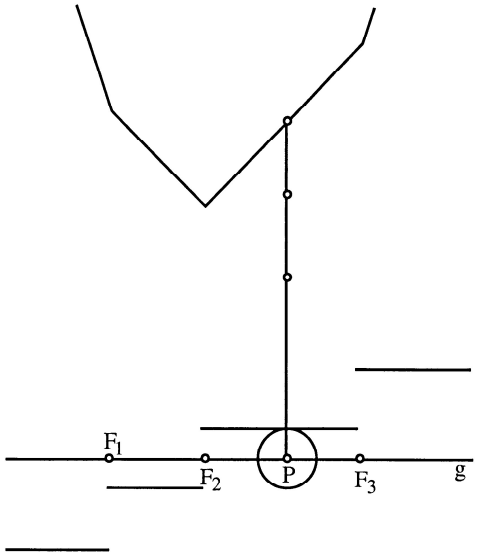


Abb. 30: Krasser Sonderfall

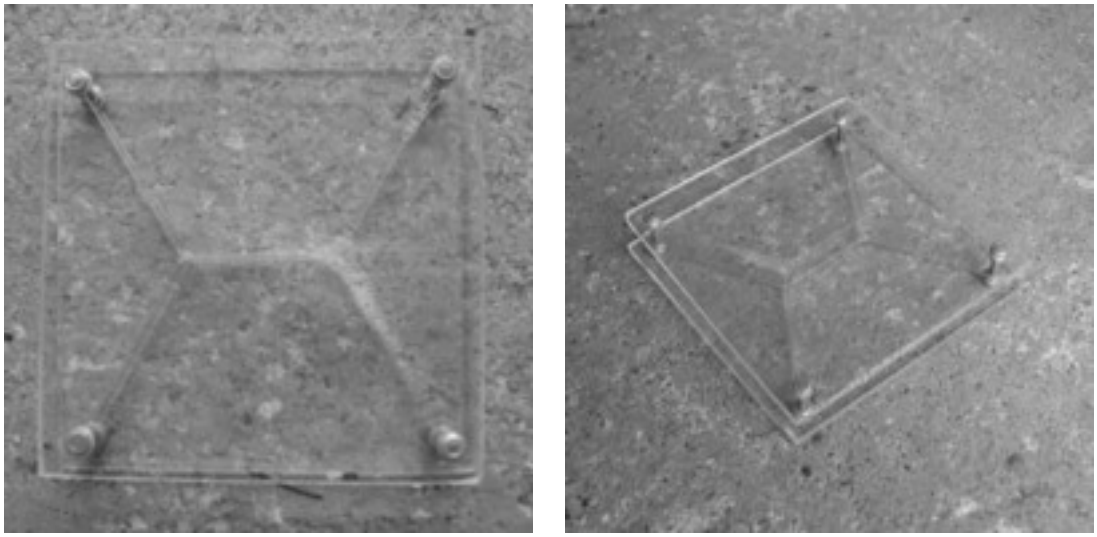


Abb. 31: Minimales Wegenetz im Quadrat

Das minimale Wegenetz hat zwei Verzweigungspunkte, in denen sich die drei Wege unter Winkeln von 120° verzweigen. Im Einheitsquadrat ist seine Gesamtlänge $1+\sqrt{3} \approx 2.732$. Im Vergleich dazu die beiden Diagonalen mit einer Gesamtlänge $2\sqrt{2} \approx 2.828$

Zu Aufgabe 23: Das minimale Wegenetz in einem regelmäßigen Fünfeck hat drei Verzweigungspunkte (Abb. 32).

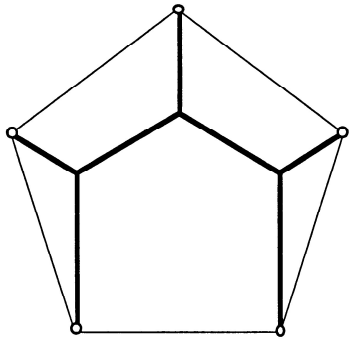


Abb. 32: Minimales Wegenetz im regelmäßigen Fünfeck

Zu Aufgabe 24: Wir suchen das Minimum der Funktion: $z(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$

Dazu muss der Gradient dieser Funktion null gesetzt werden.

$$\operatorname{grad}(z)=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{3}\frac{x-x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\\ \sum_{i=1}^{3}\frac{y-y_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{3}\begin{pmatrix}\frac{x-x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\\ \frac{y-y_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\overrightarrow{F_iP}}{\left|\overrightarrow{F_iP}\right|}$$

Nun sind aber die drei Vektoren $\frac{\overrightarrow{F_iP}}{\left|\overrightarrow{F_iP}\right|}$ Einheitsvektoren in der Richtung von $\overrightarrow{F_iP}$. Wenn die Summe dreier Einheitsvektoren verschwindet, bilden sie ein gleichseitiges Dreieck. Die drei Vektoren $\overrightarrow{F_iP}$ schneiden sich also unter Winkeln von je 120°. Wir können den FERMAT-Punkt daher mit Ortsbogen zu 120° über den Dreiecksseiten konstruieren (Abb. 33).

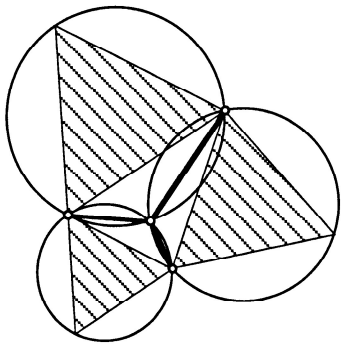


Abb. 33: FERMAT-Punkt

Literatur

Coxeter, H.S.M. [1]: Unvergängliche Geometrie, Basel: Birkhäuser 1963.

Engelhaupt, Hans [2]: Kürzeste Wege Teil I, Mathematikinformation Nr. 41 (2004) Seiten 24 – 61

[3]: Kürzeste Wege Teil II, Mathematikinformation Nr. 42 (2005) Seiten 3 – 30

Walser, Hans [4]: 99 Schnittpunkte. Beispiele – Bilder – Beweise. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2004. ISBN 3-937219-10-2

[5]: 99 Points of Intersection. Examples – Pictures – Proofs. The Mathematical Association of America 2006. ISBN 0-88385-553-4

Dr. Hans Walser
Mathematisches Institut der Universität Basel
Rheinsprung 21
CH-4051 Basel
e-mail: hwalser@bluewin.ch
http://www.math.unibas.ch/~walser/

Die Arbeit wurde am 7. August 2007 bei Mathematikinformation eingereicht.