M A T H E M A T I K I N F O R M A T I O N
GYMNASIUM STARNBERG
FACHBEREICH MATHEMATIK NR. 9
2. Januar 1983

Der nachfolgende Artikel bietet u.a. bei 1.b) bzw. bei 1.a) Lernzielkontrollen zur Schrägbildkonstruktion der 9. und 10. Jahrgangsstufe, indem die übliche Reihenfolge der Konstruktionsschritte umgekehrt wird. Gleichzeitig gibt er Hinweise, wie man auch beim Skizzieren, z.B. an der Tafel, weniger Vergehen gegenüber den Gesetzen der räumlichen Geometrie begeht.

Müssen immer Kugeln falsch skizziert werden?

Karlhorst Meyer

oder eine
Richtigstellung zu"Mathematische Gedankensplitter" von Manfred Würl [2].

Würl schreibt über bekannte Eselsbrücken oder auch Vereinfachungen zum Merken von Rechenre geln über die Kugel u.a. unter starker Benutzung der Raumanschauung. Leider vereinfachte er genauso in seinen Bildern und vergewaltigte so die kindliche Raumvorstellung. Genau der umgekehrte Weg (vergl. z.B. [1]) ist aber die Aufgabe des Lehrers: Laufend muß er dank seines größeren Wissens und dank seiner Erfahrung dem Lernenden in gezielter Form gute Bilder und Skizzen vorsetzen, um die Raumanschauung seines Schülers zu heben.

Weil bei Würl alle gezeichneten Kugeln "zu klein" sind, soll hier kurz auseinandergesetzt werden, wie man zu besseren Skizzen kommt, die dann auch mit der Raumanschauung übereinstimmen.

1. Die Problematik: Der Darstellung des Würfels entnehmen wir, daß alle Bilder durch Parallelprojektion entstanden.

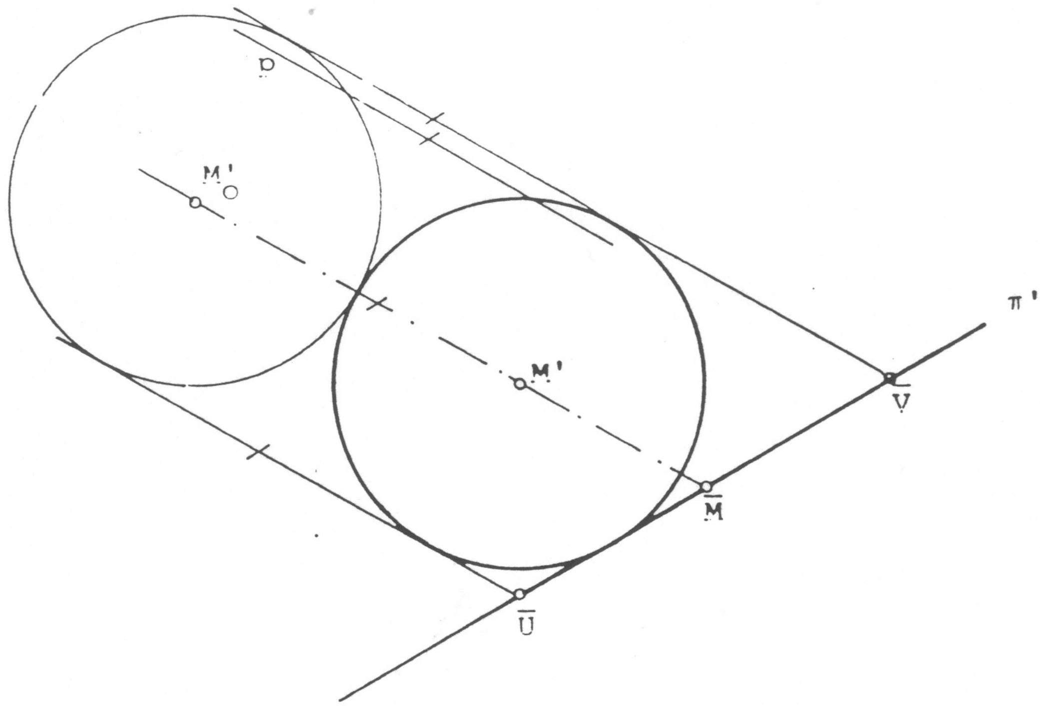
a) Bei Parallelprojektion bilden die zueinander parallelen Projektionsstrahlen der Richtung p, die eine Kugel um M abbilden, also die Kugel längs eines Kreises senkrecht zu p berühren, einen Rotationszylinder. Das Kugelbild entsteht als Schnitt dieses Projektionszylinders mit der Bildebene π.

Genau dann, wenn der Zylinder auf der Bildebene senkrecht steht, wir also Orthogonalprojektion haben, ist das Kugelbild ein Kreis. In allen anderen Fällen eine Ellipse (siehe Figur 1).

Da aber der Würfel bei Würl im Schrägbild rechte Winkel zwischen Würfelkanten als rechte Winkel zeigt, liegt hier keine Orthogonalprojektion vor.

Die Kugel kann mit ihrem Mittelpunkt längs der Zylinderachse beliebig verschoben werden, ohne daß sich ihr Bild ändert. Z.B. ist es zweckmäßig M nach M_o hier zu verschieben, damit Figur 3 nicht zu sehr überladen wird.

$\overline{U}\,\overline{V}$ ist dann die große Achse der Bildellipse, in $\overline{M}$ senkrecht in π dazu die kleine Achse mit dem Kugelradius als Länge zu finden.



Figur 1

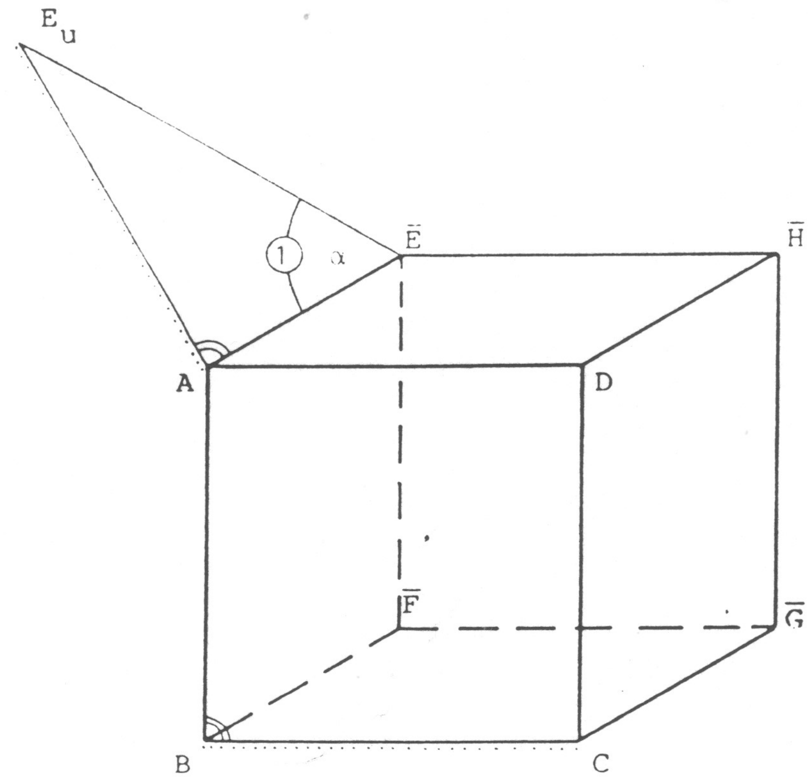
b) Rekonstruktion der Projektionsrichtung:
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, der Würfel liege mit seiner Seitenfläche ABCD in der Bildtafel. Die folgende Konstruktion gibt an, wie man leicht den Neigungswinkel der Projektionsstrahlen gegen die Bildtafel rekonstruieren kann:

Mit $\overline{A}$ bezeichnen wir das Bild von A usw. Wegen der von uns getroffenen Annahme gilt dann: $\overline{A} = A$, $\overline{B} = B$, $\overline{C} = C$, $\overline{D} = D$. Das gesuchte Neigungsdreieck, das den Neigungswinkel der Projektionsrichtung liefert, steht dann senkrecht über $A\overline{E}$. Deshalb muß man es nur um 90^{o} in die Bildtafel umklappen zu dem Dreieck $AE_u\overline{E}$, um den Neigungswinkel α zu bekommen. E_u ist die umgeklappte Würfelecke E, also die Strecke AE_u gleich lang mit der Strecke BC, was durch Punktsäume angezeigt wurde (siehe Figur 2).

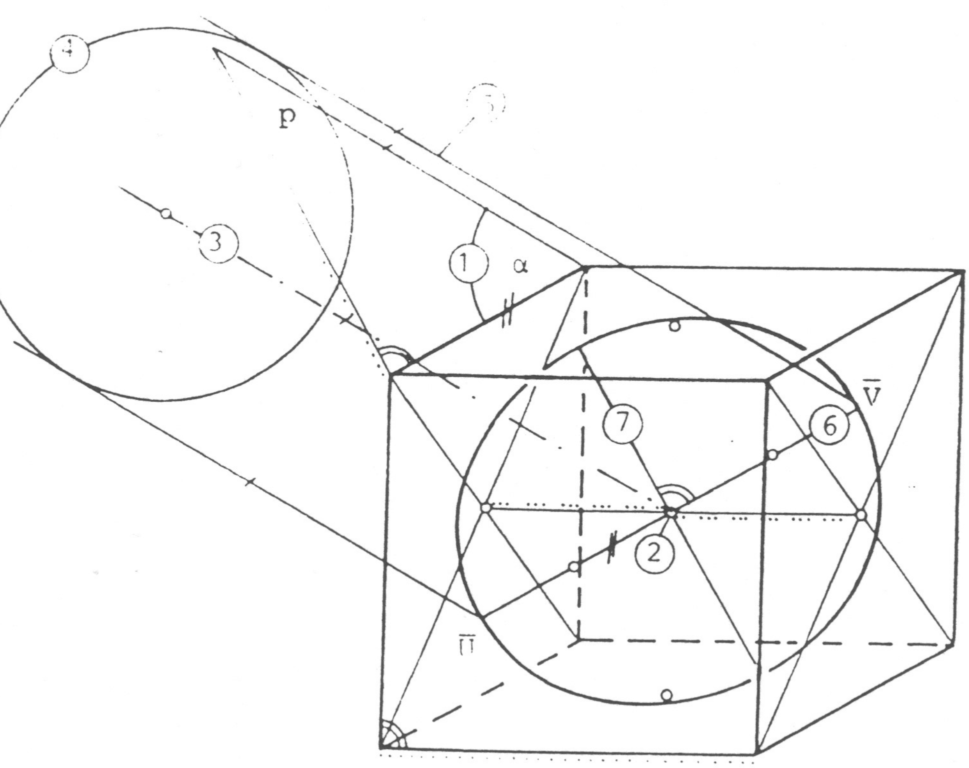
c) Einpassen der Würfelinkugel:
Die Inkugel hat den Radius $r = \overline{AB}:2$. Hat man das Bild $\overline{M}$ des Kugelmittelpunktes M gefunden, so liegt offenbar parallel zum Neigungsdreieck aus Figur 2 die Konfiguration der Figur 1, weil alle Projektionsstrahlen parallel sind.

Hieraus ergibt sich die folgende

<u>2. Konstruktion</u> (siehe Figur 3):
Die Einzelkonstruktionsschritte wurden auch in Figur 3 durchnumeriert.
1. Durchführung der Konstruktion der Figur 2.
2. Auffinden der Kugelberührpunkte am Würfel an zwei gegenüberliegenden Würfelseiten z.B. durch Schneiden zweier Diagonalen. Halbieren der sich ergebenden Strecke (Punktsäume!) ergibt das Bild des Kugelmittelpunktes.
3. Parallel zur geklappten Projektionsrichtung p zeichnet man durch $\overline{M}$ die geklappte Zylinderachse und wählt
4. auf ihr einen Kugelmittelpunkt und zeichnet die Kugel in umgeklappter Lage.



Fiqur 2



Fiqur 3

5. Die Tangenten in p-Richtung an das geklappte Kugelbild ergeben die Einpassung von Figur 1 in unsere Konstruktion und damit
6. die große Achse unserer Ellipse.
7. Senkrecht in $\overline{M}$ hierzu ist dann die kleine Ellipsenachse mit der Länge des Kugelradius anzutragen und man hat den Kugelumriß im Bild gefunden.

3.Ergebnis:

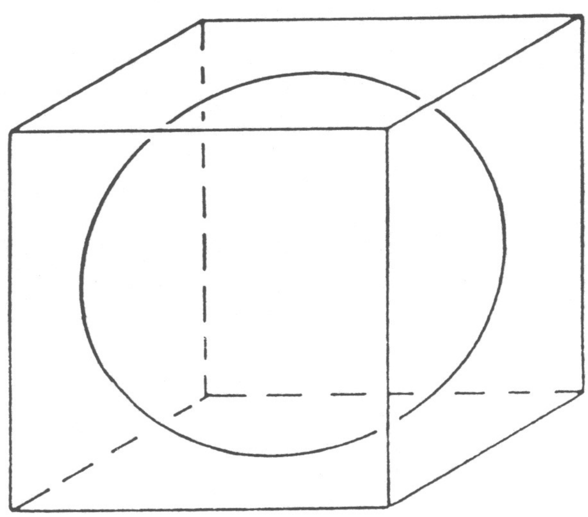
Als Autor steht man also vor der Wahl zwischen den folgenden Alternativen:

a) **Das Kugelbild ist ein Kreis, dann muß ich Orthogonalprojektion wählen und das Würfelbild hat nur dann rechte Winkel zwischen den Bildern von Kanten, wenn es ein Quadrat ist. In allen anderen Fällen** sollte man dann aber darauf achten, daß die"Kugelpole" oder hier die Berührpunkte mit Würfelseiten a l l e innerhalb des Kugelumrisses liegen müssen (sobald das Bild des "Äquators" keine Strecke sondern eine Ellipse ist).

b) Der Würfel ist "im Bild zu sehen" und hat im Bild zwischen den Würfelkanten rechte Winkel, dann aber ist das Kugelbild eine Ellipse, sicher aber kein Kreis.

c) Der Würfel ist "im Bild zu sehen" und hat im Bild zwischen den Würfelkanten keine rechten Winkel, dann kann das Kugelbild ein Kreis sein (vergl.a), wenn es nämlich Orthogonalprojektion war). Hier läßt sich also beim Skizzieren am leichtesten schwindeln.

Würl wäre gut beraten gewesen, wenn er seine Skizzen analog Figur 4 angelegt hätte.



Figur 4

4. Schlußbemerkung:

Früher, in der "guten,alten Zeit" wurden solche Anschauungs~~pflege~~ fehler schon durch das Freihandzeichnen der Kunsterziehung vermieden, heute muß man hier schon zur Mathematik greifen. Das Beispiel demonstriert auch, daß ein Unterricht in Darstellender Geometrie, Tafelzeichnen u.a. für Lehramtskandidaten zu empfehlen ist. Zum Schluß ein Frage zur Verständnisüberprüfung:

Ist es Zufall, oder muß es so sein, daß in Figur 3 zwei Berührpunkte zwischen Kugel und Würfel im Bild auf der Geraden $\overline{UV}$ liegen?

Literatur:

[1] Meyer, Karlhorst: Propädeutik zur Raumanschauung, mathematiklehrer 3-1982 Seite 29-33

[2] Würl, Manfred: Mathematische Gedankensplitter, mathematiklehrer 3-1982 Seite 34-37.

Anschrift des Autors:
Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
8014 Neubiberg