45a

M A T H E M A T I K I N F O R M A T I O N
GYMNASIUM STARNBERG
FACHBEREICH MATHEMATIK NR. 6
14. OKT. 1981

Dr. Karlhorst Meyer

Erstes Konstruieren und Beweisen in der räumlichen Geometrie

Anschließend an "Propädeutik in der Raumanschauung" [6], wo der Autor sich bemühte, in den Jahrgangsstufen 5 und 6, erste Erkenntnisse im Raum zu vertiefen und auszubauen ohne diese tastenden Schritte im dreidimensionalen Anschauungsraum durch eine übertriebene Verwissenschaftlichung abzuwürgen, folgt ein weiterer Artikel, der einen geeigneten Übergang zu den grundsätzlichen Methoden des Additum Darstellende Geometrie [1] in der 10.Jahrgangsstufe schaffen will.

Die meisten Lehrbücher der Darstellenden Geometrie (vergl. das anschließende Literaturverzeichnis) beginnen den Unterricht für den Schüler langweilig, weil zu langatmig, mit den sogenannten Grundkonstruktionen der gegenseitigen Lage und des Messens. Jedes dieser Konstruktionsprobleme ist für sich allein sehr einfach. Jeder Lehrer, der mit diesen Grundproblemen die Darstellende Geometrie beginnt, stellt fest, daß bei diesem Weg der Schüler in dem Augenblick, wo es gilt, mehrere solche Grundkonstruktionen gleichzeitig innerhalb einer Aufgabenstellung der Praxis durchzuführen, im Gewirre der Linien ertrinkt, weil es ihm nicht mehr gelingt, primär das Objekt, also den Gegenstand des Anschauungsraumes zu erkennen. Das liegt zum Teil wohl daran, daß man auch in der Darstellenden Geometrie, wie übrigens in jeder anderen Teildisziplin der Mathematik, erst dann mit dem Grundsätzlichen beginnen kann, wenn man vorher - vielleicht mit nicht immer der größten mathematischen Strenge - hinreichend viele Beispiele und Anwendungen kennen gelernt hat. Die genannte Literatur, vornehmlich als Hochschulliteratur gedacht, kann sich den abstrakten Weg erlauben, weil sie davon ausgehen kann, daß der Student bei seinem vorherigen Gymnasiumsbesuch hinreichend viele Einzelprobleme kennen gelernt hat, so daß sie jetzt nach dem Grundsätzlichen des Konstruierens fragen kann. Die Hochschulliteratur macht es sich also zur Aufgabe, die Darstellende Geometrie als Wissenschaft zu *begründen*; dies ist aber eine ganz andere Aufgabenstellung als die des Lehrers und Didaktikers, dessen Aufgabe vor allem darin besteht, seinen Schülern die Geometrie *verständlich zu machen*.

Aus solchen Gründen ist es durchaus sinnvoll, in den Klassen 8 und 9, auch noch zum Teil in Jahrgangsstufe 10, Konstruktionen im Raum vorzunehmen und erst im Nachhinein, im Additum, s.o., auf das Grundsätzliche der Konstruktionswege zu sprechen zu kommen.

Im vorliegenden Artikel wird in knapper Form auf einige Schwerpunkte hierbei in den Klassen 7 und 8 eingegangen. Wenn in [6] gesagt werden konnte, daß i.a. in den Jahrgangsstufen 5 und 6 viel Zeit für die räumliche Geometrie vorhanden ist, so gilt dies für die Jahrgangsstufen 7 und 8 sicher nicht mehr. Hier kommt es dann vor allem auf das Geschick des Lehrers an, mit wenigen Worten räumliche Geometrie - meist im Rahmen von Anwendungsaufgaben - zu vermitteln.

7. Jahrgangsstufe:

Die gymnasiale Mittelstufe beginnt im Gegensatz zu anderen Fächern mit der 7.Jahrgangsstufe. Winkel, Strecken, Spiegelungen u.v.a.m. wird jetzt genauer als in der Unterstufe benutzt. Spätestens jetzt sollte auf die entsprechenden Hinweise,die räumliche Geometrie betreffend (vergl. [6]), eingegangen werden.

7.1 Punkt, Gerade, Ebene, Lot als Grundbausteine:

Man spricht über die Grundbausteine und Axiome der Geometrie. Warum sollte man nicht die Gelegenheit nutzen, auch über windschiefe Geraden im Raum zu reden? Viel Freude bereitet es 12-13-jährigen, herauszufinden, welche Minimalforderungen die eindeutige Lage einer Ebene im Raum festlegen. Erst dann erhält das Axiom: Eine Gerade ist durch die Vorgabe von zwei verschiedenen Punkten festgelegt, seinen besonderen Sinn.
Finden kann man solche Aussagen beim Betrachten der Ecken, Kanten und Flächen des Klassenzimmers; also:

Eine Ebene ist festgelegt durch 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen oder durch zwei sich schneidende Geraden oder durch zwei parallele Geraden oder durch eine Gerade und einen Punkt nicht auf der Geraden.

Auch wurde die gegenseitige Lage von 2 Geraden, von 2 Ebenen, von einer Ebene und einer Geraden exemplarisch anhand des Klassenzimmers unterrichtet. Auffallend hierbei war, daß stets das Senkrechtstehen neben dem Sich-schneiden aufgezählt wurde. So etwas darf nicht stören; für den Anfänger in der Geometrie gibt es eben zunächst keinen Unterschied zwischen Inzidenz und Metrik; ihm kann auch noch gar nicht klar sein, daß bei der Verwissenschaftlichung der Geometrie nur durch solche Unterscheidungen in der großen Theorie eine Ordnung aufgebaut werden kann. Deshalb wäre es grundverkehrt, wenn der Lehrer dieser Ordnung wegen des erarbeiteten Falls Senkrechtstehen abwürgen würde.

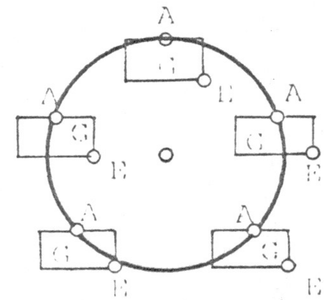
Siehe auch 5.5 aus [6].

7.2 Kreis:

7.2.1 Zylinder: Physikalisch gibt es keinen Kreis, sondern nur Kreisscheiben, also Zylinder. Der Schüler im Bastelalter ist deshalb oft mit dem Zylinder vertrauter als mit dem Kreis (vergl. hierzu auch 5.2 aus [6]). Deshalb führt man den Kreis anhand eines einschlägigen Spielzeuges ein. Es darf nicht stören, daß die Umgangssprache gelegentlich zu einem Zylinder mit geringer Höhe Kreis sagt: Der Betrachter eines Geldstückes erkennt in der Regel einen Kreis und nicht einen Zylinder. Zylinder treten als Rollunterlagen auf, sind also Gleichdicke. Hier ist es angebracht, Überlegungen, wie sie erstmals der oft kopierte Ingenieur und Geometer REULEAUX [7] angestellt hat, einfließen zu lassen: Der Kreis ist ein Gleichdick, die Umkehrung dieser Aussage ist falsch (vergl. hierzu MEYER [5] G.1.4). Schüler wollen Zylinder basteln, auch wenn der Lehrplan die Zylinderabwicklung erst für die 10.Jahrgangsstufe vorsieht. Die Überlegung der 10.Jahrgangsstufe, durch Abrollen des Zylinders seine Abwicklung zu bekommen, kann in der 7.Jahrgangsstufe zu schwierig sein; deshalb wird man das Ergebnis vorwegnehmen und aus einem rechteckigen Stück Papier einen Zylinder formen.
So ergibt sich zwanglos, daß es neben dem Kreis - besser Rotationszylinder-auch noch andere Zylinder gibt.

7.2.2 Geometrie im Raum, auch wenn sie theoretisch in einer Ebene dargestellt werden kann, bereitet auch bei Erwachsenen aus Gründen wie bei 7.2.1 Schwierigkeiten; denn die geeignete Ebene ist oft nicht eindeutig bestimmt und wird in der Regel erst nach gezielter Schulung erkannt.
Ein typisches Beispiel für das resultierende *Denken im Riß* ist das folgende:

Die Gondeln G eines Riesenrades sind jeweils in A befestigt. Welche Kurve durchläuft die Gondelecke E bei einer vollen Umdrehung?



Für weitere derartige dynamische Geometriebeispiele siehe MEYER [5] G.1.3,G.1.5,G.1.6.

Viele Universitätsvorlesungen in Konstruktiver Geometrie beginnen mit den sogenannten stereometrischen Grundtatsachen. Die hierfür i.a. angesetzte Zeit von 2 Vorlesungsstunden ist sicher sehr knapp bemessen, wenn der Student Bildungslücken über die Begriffe Schneiden, Parallelität, Winkel, Lot im Raum in solch kurzem Anlauf schließen soll. Auch hier handelt es sich bestenfalls nur um einen 2.Anlauf, der einen Überblick über die Begriffsbildungen der räumlichen Geometrie im Zusammenhang bringen soll, die vorher schon beim Gymnasiasten allmählich - *völlig unbewußt* - in einer13-jährigen Schulzeit entstanden sind. Unterrichtsthemen der 7.Jahrgangsstufe geben hierzu Gelegenheit:

7.3 Winkel, Parallelität:

Lehrer, die 5.4 bis 5.7 aus [6] und 7.1 behandelt haben, können die folgenden Probleme stellen:

7.3.1 Miß den Winkel a) zwischen einer Seite und einer Grundfläche
b) zwischen einer Kante und der Grundfläche
einer früher einmal gebastelten Pyramide (vergl. 5.9.4 aus [6]).
Handwerklich problematisch ist, wie man den Winkelmesser zu halten hat, um die Messung durchzuführen, ohne die Pyramide aufzuschneiden.

7.3.2 An einem gebastelten Ebenenmodell zeigt der Lehrer Neben- und Scheitelwinkel an zwei sich schneidenden Ebenen.
Zusatzfrage für gute Schüler: Eine Gerade schneidet eine Ebene; kann man dann auch von Neben- und Scheitelwinkeln sprechen?
Wie führt man solche Probleme der räumlichen Geometrie auf Probleme der Ebene zurück? Meist finden Schüler selbst die entscheidende Idee: Man muß die Ebenen nur so anschauen, daß sie als Geraden erscheinen, bzw. beteiligte Geraden zum Betrachter parallel liegen.

7.3.3 Die Parallelität zwischen Ebenen und Geraden kann wie in 7.1. auch erst hier behandelt werden.

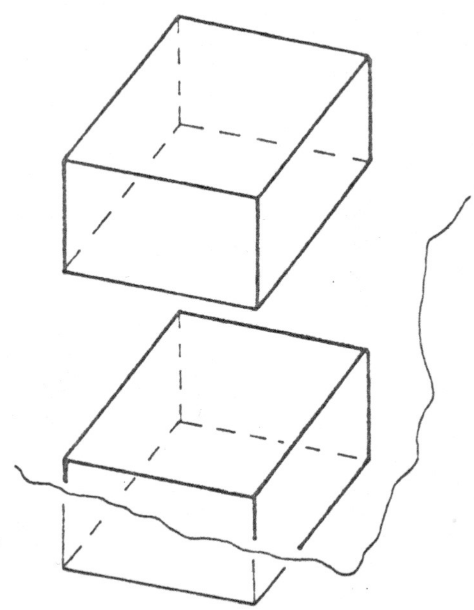
7.3.4 Spätestens an dieser Stelle sollte gezeigt werden, daß die Winkelsumme im Dreieck ein wichtiger Satz (ob man dem Schüler hier den Begriff Axiom sagen soll, sei dahingestellt) der ebenen Geometrie ist, der nicht uneingeschränkt zu gelten braucht. Es wird gemäß 5.8 aus [6] verfremdet.

7.4 Bewegungen:

Schon in der Unterstufe (vergl. 5.10 aus [6]) wurde betont, daß Begriffe wie Spiegelung und Drehung im Anschauungsraum ihren Ausgangspunkt haben. Jetzt gilt es, neben der planimetrischen Anwendung, die zu den Kongruenzsätzen hinführt, die einmal gewonnene Erfahrung im Raum zu erhalten und vor allem dort, wo dies ohne besondere Anstrengung möglich ist, auszubauen. Der folgende Aufbau richtet sich nach dem in Bayern am häufigsten durchgeführten Curriculum [4], d.h. insbesondere, daß Teilinformationen, die hier erst in Jahrgangsstufe 8 kommen, könnten grundsätzlich bereits auch in Jahrgangsstufe 7 behandelt werden.

Das *Hauptproblem der Darstellenden Geometrie* kann jetzt durchaus offen besprochen werden: Der Raum wird durch Bilder (Risse) in der Ebene dargestellt. Die Bilder zeigen die Dinge des Raumes i.a. nur verzerrt:

7.4.1 Man betrachtet einen vorgefertigten Schrägriß eines Quaders samt seinem Spiegelbild (vergl. die Abbildung). Auch ein Foto, etwa von Bäumen, die sich in einem See spiegeln, sollte man sich ansehen. HAHN-DZEWAS [3]Seite 52 wäre in diesem Zusammenhang abzulehnen, weil bei dieser ebenen Darstellung so stark idealisiert wurde, wie dies i.a. nicht möglich sein wird, und dann wichtige Merkmale des Spiegelns in der Ansicht (Riß) unkenntlich bleiben würden:



Gleichheit von Abständen zur Spiegelungsebene (siehe die Abbildung). Die Verbindungsgeraden der Punkte mit ihren Spiegelpunkten stehen auf der Spiegelebene senkrecht.

Auch ergibt sich die Frage: Wie muß man den Gegenstand und sein Spiegelbild betrachten (*Denken im Riß*), damit die physikalischen Zusammenhänge unverzerrt sichtbar werden? Antwort: Die Spiegelebene muß als Gerade dargestellt werden. Damit wurde aus dem ursprünglichen Problem ein ebenes.

7.4.2 Ein weiteres Beispiel geht von einem Experiment aus: Man stellt zwei ebene Spiegel unter einem rechten Winkel zueinander und zwischen die Spiegel eine Kerze. Man betrachtet die so entstehenden Spiegelbilder der Kerze. Ohne auf die physikalischen Hintergründe einzugehen, läßt man das Gesehene skizzieren. D.h. der Lehrer zeichnet von der Anordnung einen Schrägriß an die Tafel, die Schüler, soweit sie selbständig arbeiten, werden sich wohl auf Grund von 7.4.1 zu einem geeigneten Riß entscheiden.

Bemerkung: Gerade im Hinblick auf den Übergang von den heuristischen Überlegungen der Jahrgangsstufen 5 und 6 zum (exakten) Konstruieren der Jahrgangsstufen 9 und 10 sollten möglichst viele *Freihandskizzen* im Mathematikunterricht gefertigt werden, um diese heute oft fehlende Komponente der Kunsterziehung zur Förderung des Vorstellungsvermögens auszugleichen.

7.4.3 Man schneidet einige Buchstaben oder Verkehrszeichen aus Pappe aus und läßt deren Symmetrien untersuchen. Dieses oft praktizierte Verfahren läßt sich leicht zu einer dreidimensionalen Übung fortsetzen, wenn man 2 Exemplare von jedem Buchstaben hat: Man legt die gleichen Buchstaben in verschiedene Ebenen (des Klassenzimmers) und fragt nach den Bewegungsbausteinen, durch die sie ineinander übergeführt werden. So erhält man von Anfang an Beispiele für Bewegungen, bei denen sich etwas bewegt!

7.4.4 Die Überlagerung von Translation (Verschiebung) und Drehung läßt sich leicht an einem Spielzeugkran mit Laufkatze demonstrieren.

7.4.5 Die Überlagerung zweier Translationen kann an der Bewegung eines Schiffes beim Durchgang durch eine Schleuse gezeigt werden. Hierzu eignet sich auch die Bewegung eines Flugzeuges oder Segelschiffes bei seitlicher Windströmung.

7.4.5 Für viele Schüler ist die Überlagerung Schubspiegelung schwierig, weil Schüler gewohnt sind, sich die Überführung Urbild-Bild im Geiste manuell vorzustellen, was dann aber erst dreidimensional möglich ist, da die Spiegelung nur als Umwendung ausgeführt werden kann.
Um dies zu verdeutlichen, wird man Dias geeigneter Pflastermuster (etwa ESCHER [2]) vorführen und besprechen, nachdem man sich vom Grundbaustein des Pflasters eine Pappschablone beschafft hat, mit deren Hilfe man durch Ausführen der nötigen Bewegungen an der Tafel das Muster rekonstruieren kann.

Bemerkung: Wie in [6] muß hier betont werden, daß es sich auch beim vorliegenden Artikel um kein Lehrplanmuß, sondern nur um ein gelegentliches Angebot handelt, aus dem aber der Lehrer eine Auswahl zu treffen hat. Wem 7.4.5 zu aufwendig ist, sollte aber Entsprechendes mit den Stühlen und Tischen im Klassenzimmer durchführen lassen.

Spätestens mit 7.5 tritt das mathematische Begründen in den Vordergrund der räumlichen Geometrie am Gymnasium:

7.5 Räumliche Anwendung der Kongruenzsätze:

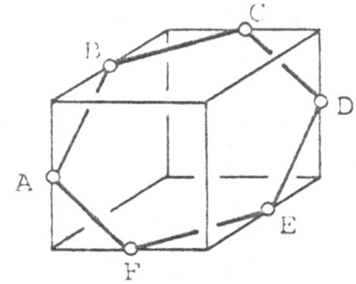
7.5.1 Als Übergang von 7.4 nach 7.5 können Pflastermuster dienen, die sich entweder aus kongruenten Teilen oder aus nicht kongruenten (nur ähnlichen oder hyperbolisch kongruenten) Teilen aufbauen (siehe ESCHER [2]). Selbstverständlich können auch alle anderen Beispiele aus 7.4 herangezogen werden, wenn man nur die Endlage einer Bewegung mit dem Urbild vergleicht.

Ein Problem der Darstellenden Geometrie ist, daß nur selten die Risse einer gegebenen Konfiguration zu dieser kongruent sind. Das Auffinden der sogenannten wahren Größen geschieht stets durch eine Anwendung der Kongruenzsätze:

7.5.2 a) Welches besondere Dreieck können drei Ebenendiagonalen eines Würfels bilden? (Begründe Deine Antwort).
b) Gegeben sind drei Risse eines Würfels; konstruiere solche Diagonalen in den Rissen und gib das Dreieck von a) in wahrer Größe.

7.5.3 Begründe:
a) Halbiert man die Kanten eines Würfels, die von einer Ecke ausgehen, dann bestimmen die Halbierungspunkte ein gleichseitiges Dreieck.
b) Das gleichseitige Dreieck von a) schneidet vom Würfel eine dreiseitige Pyramide ab. Wann ist eine dreiseitige Pyramide eine Würfelecke?

7.5.4 Gewisse Mittelpunkte der Kanten eines Würfels sind die Ecken eines Sechseckes (vergl. die nebenstehende Skizze). Man begründe: Das Sechseck ist ein reguläres ebenes Sechseck, d.h. liegt in einer Ebene und alle seine Seiten und Winkel sind gleich groß. Konstruiere das Sechseck, wenn die Würfelkantenlänge 5cm beträgt.

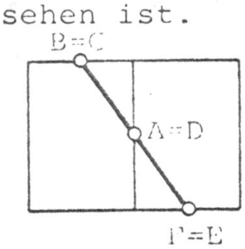


Zum Beweis: Hat man insbesondere die beiden letzten Aufgaben durchgeführt, so finden die Schüler sehr schnell:

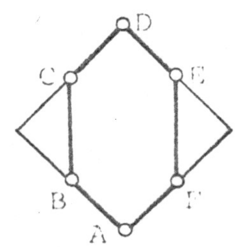
a) Alle Seiten des Sechseckes sind nach dem Kongruenzsatz sws (schraffiertes Dreieck) gleich lang.

Meist muß man den Schülern erst an einem mitgebrachten Drahtmodell klären, daß das Sechseck nicht einmal eben zu sein braucht:

b) Das Kantenmodell des Sechseckes betrachtet man aus einer bestimmten Richtung so, daß die Ebene sich als Gerade zeigt (*Denken im Riß*). Deshalb ist es sinnvoll zu versuchen, den Würfel so zu betrachten, daß das Sechseck in dieser speziellen Lage zu sehen ist. Wir fertigen in dieser Lage vom Würfel ein Bild von vorne und eines von oben. Die Bezeichnungen Auf- und Grundriß brauchen deshalb nicht genannt zu werden.



Offenbar ist dann im Aufriß B=C, A=D und E=F. Weil die beiden schraffierten Dreiecke kongruent sind, liegen BAE auf einer Geraden, also muß das Sechseck eben sein.



c) Die Schüler sind sehr überrascht, wenn man an dem mitgebrachten Drahtmodell zeigt, daß das Sechseck deshalb noch lange nicht regulär zu sein braucht.

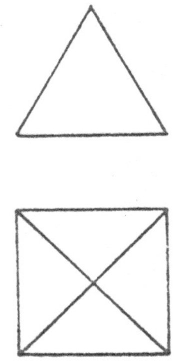
Die weitverbreitete Methode, jetzt noch aus der Klasse durch *Suggestion* den Rest des Beweises herauszuholen, wäre Betrug. Der Lehrer soll offen zugeben, daß er weiß, wie es weiter geht, und bereit ist, sein Geheimnis zu verraten:

Die Streckenlängen $\overline{AD}$, $\overline{FC}$, $\overline{EB}$ sind gleich, weil sie jeweils mit der Länge der Flächendiagonalen des Würfels übereinstimmen, wie man durch eine Parallelverschiebung sehen kann. Hierzu benötigt man $BC \parallel AD \parallel FE$, was wir der Ansicht von vorne entnehmen. D.h. ECFB ist ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich in einem Punkt M halbieren. Das gleiche gilt für AFDC. Also gibt es ein M in der Sechseckebene mit $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ = usw.. Deshalb ist das Sechseck nach dem Kongruenzsatz sss regulär.

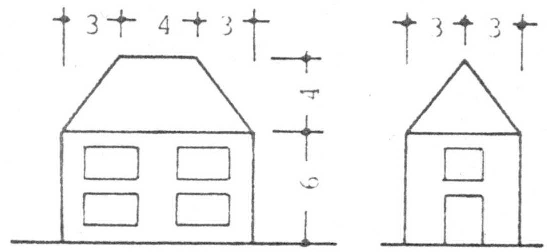
Die Konstruktion des Sechseckes bei vorgegebener Würfelkantenlänge wird als Hausaufgabe gegeben.

Zugegeben, oft wird diese Aufgabe für eine 7.Jahrgangsstufe zu schwer sein; dann kann man sie im Rahmen der Kongruenzbeweise der 8.Jahrgangsstufe durchführen.

7.5.5 Bastle eine vierseitige Pyramide, die von vorne betrachtet sich als gleichseitiges Dreieck, von oben betrachtet als Quadrat mit Diagonalen zeigt (vergl. die Skizze). Welche Hilfskonstruktionen muß man vorher durchführen? Begründe Deine Antworten.



7.5.6 Ein Walmdach ist in zwei Ansichten gegeben. Einige, aber nicht alle Maße sind in m gegeben. Konstruiere alle Dachflächen im Maßstab 1:100.



8. Jahrgangsstufe:

8.1 Geometrischer Beweis:

Ab der 8.Jahrgangsstufe wird nun am Gymnasium streng bewiesen - was auch immer das bedeuten soll. Wenn auch der *didaktische Bourbakismus* überwunden ist, wo man glaubte, auch an der Schule strenge Beweise vor allem schreiben zu müssen, so steht doch außer Zweifel, daß der Schüler nach so vielfältiger Erfahrung im Fach Geometrie die Beweisbedürftigkeit von Aussagen einsehen sollte und Sicherheit in der Handhabung gewisser Verfahren des Beweisens erhalten sollte. Hierzu kann auch die räumliche Geometrie ihren Beitrag leisten:

8.1.1 Die Notwendigkeit der Existenz einer Voraussetzung kann an dem folgenden Satz gezeigt werden:
Zwei Geraden schneiden sich oder sind parallel.
Dieser Satz ist in der Ebene richtig, im Raum falsch.

8.1.2 Im bsv-Buch [4] wird auf Seite 92 und den folgenden darauf hingewiesen, daß das Auge beim Betrachten von Zeichnungen leicht getäuscht werden kann, also eine von der Zeichnung unabhängig geführte Überlegung, sprich Beweis, zuverlässiger ist.
Verwandt mit der eben beschriebenen Situation sind Täuschungen anderer Art, die ihre Ursache in fehlerhaften Zeichnungen haben. Als ein für Schüler adäquates Beispiel kann etwa die endlose Treppe von ESCHER oder auch dessen perpetuum mobile [2] dienen. Einen Überblick über solche Zeichnungen, die den Betrachter zu der Überlegung zwingen, was ist hier falsch, findet man bei MEYER [5] unter G.4.2, G.4.3, G.4.4.

8.1.3 Warum irrt sich der Schüler, wenn er annimmt, es gäbe einen räumlichen Peripheriewinkelsatz:
Im Raum liegen alle Punkte, von denen man eine gegebene Strecke unter einem festen Winkel aus sieht, auf einer Kugelschale über der Strecke.

Selbstverständlich kann der Beweis hierzu erst nach Behandlung des Peripheriewinkelsatzes durchgeführt werden.

8.2 Linearität im Raum:

Ein Teil des Geometrieunterrichtes der 8.Jahrgangsstufe findet bei der Behandlung der Graphen linearer Gleichungen mit zwei Variablen im Fach Algebra statt. Da viele Aussagen der Geometrie dem Schüler nur deshalb schwer fallen, weil er nicht in der Lage ist, die Zurückführung der räumlichen Problematik auf den ebenen Fall rasch genug zu erkennen (*Fehlen des Denkens im Riß*), sollte der Lehrer möglichst oft im Unterricht räumliche Probleme einbauen, damit der Schüler laufend an Erfahrung gewinnt.

Immer dann, wenn bei "gleichmäßigem" Vorausschreiten in einer Ebene (also auch längs einer Kurve) ein gleichmäßiger Zuwachs in Loten über dem ebenen Weg zu beobachten ist, liegt eine Linearität vor. Um dies zu verdeutlichen, nimmt man ein rechtwinkeliges Dreieck aus Papier und stellt es als Stützdreieck auf die geschlängelte Bahnlinie einer Landkarte. Aufgaben, wie die folgende, können damit gelöst werden:

8.2.1 Die Bahnlinie vom Ort A (423 m üNN) steigt gleichmäßig nach dem 90 km entfernten Ort B (498 m üNN). In welcher Höhe befindet sich der Zug nach 65 km Fahrt?
Diese Aufgabe könnte man auch in der 6.Jahrgangsstufe im Rahmen der Schlußrechnung lösen (vergl. 6.4 aus [6]); in der 8.Jahrgangsstufe ist sie eine Wiederholungsaufgabe.

8.2.2 Überprüfe: Der Anstieg einer Würfelraumdiagonalen gegenüber einer Seitenfläche ist proportional der zurückgelegten Entfernung in jeder Ansicht (Riß).

8.3 Vektorgesetze im Raum

Die Vektoren werden als Verschiebungen oder als Klassen paralleler, gleichlanger, gleichgerichteter Pfeile in der Ebene eingeführt. Der Zusammenhang mit analogen Fragestellungen im Raum - auch bei den Vektorrechengesetzen - kann laufend miteinbezogen werden:

8.3.1 In einer Tafelzeichnung wird ein Quadrat (in der Tafelebene parallel) verschoben und die Frage gestellt: Was sehen wir, wenn wir einmal den ebenen Zusammenhang, von dem wir ausgegangen sind, vergessen:
a) eine räumliche Parallelverschiebung, die wir in der Tafelebene dargestellt haben;
b) das ebene Bild eines Quaders.
Als nächstes verschiebt man durch Konstruktionszeichnung an der Tafel ein Polygon (zweckmäßiger Weise ein nicht konvexes 5-Eck). Es entsteht der Eindruck, ein Prisma zu sehen.
Es folgt die Definition einer prismatischen Fläche einmal durch Verschiebung der Leitlinie, zum anderen durch Erzeugung einer Mantellinie.

8.3.2 Als Verkettung räumlicher Verschiebungen und damit Addition von Raumvektoren kommen infrage: Ein Flugzeug steigt auf und wird durch Wind abgetrieben.
Wie bereits an früherer Stelle betont, sehen viele Schüler nicht, daß auch bei diesem Beispiel "nur" ein ebener Fall untersucht wird.

8.4 Prisma (siehe auch 8.3):

In völliger Analogie zur Flächenberechnung eines Parallelogramms erhält man das Volumen eines allgemeinen Spates durch Scherung aus dem Volumen eines Quaders. Man führt die Scherung in 2 Richtungen an einem Bücherstabel durch.

8.5 Schrägbild als Rezept:

Ab der 5.Jahrgangsstufe sind Schüler gewohnt, daß Lehrer an der Tafel Schrägbilder skizzieren, also dem Schüler sichtbar entstehen lassen und nicht im Overheadprojektor fertige Zeichnungen dem Schüler "an den Kopf werfen". Im Laufe der Schuljahre hat der Schüler mehr und mehr solche Schrägbilder abgezeichnet. Der Lehrer hat ihm Rezepte verraten, wie man Schrägbilder *konstruiert* (d.h. unter alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal). Wie immer in der Darstellenden Geometrie, geht es jetzt um die folgenden Probleme 8.5.1 und 8.5.2:

8.5.1 Wie konstruiert man ein Schrägbild: Wie in allen Lehrbüchern nachzulesen ist, geschieht dies durch Abbildung eines räumlichen Gitterpunktnetzes; hierzu sind drei Scharen paralleler Geraden nötig, die zweckmäßiger Weise manchmal durch weitere zu ergänzen sind. So bekommt man Anwendungen für die *handwerkliche Fertigkeit im Zeichnen* paralleler Geraden:
In der Regel reicht hierbei nicht die Genauigkeit, die mit dem sogenannten Geodreieck erzielbar ist, aus. Nicht ohne Grund benutzt der technische Zeichner bei Präzisionszeichnungen nicht die Zeichenmaschine, sondern einen Winkelsatz zum Zeichnen paralleler Geraden. D.h. es ergibt sich eine natürliche Situation, den Schüler zu zwingen, Parallelverschiebungen mit einem Dreieck und einem Lineal auszuführen. Leider läßt sich diese Methode nur an der Wandtafel demonstrieren, aber nicht praktizieren.
Deshalb vereinbart der Lehrer nach einer ersten Vorführung an der Tafel: Jedesmal, wenn er nach einem sogenannten Parallelenlineal (z.B. von der Firma WILAU [8] und anderen) greift, hat der Schüler eine Parallelverschiebung z.B. mit zwei Dreiecken durchzuführen.

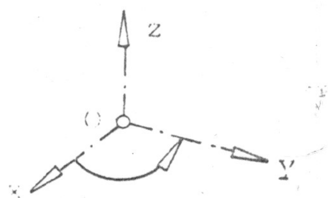
Schon beim Zeichnen solcher Schrägbilder ist man bemüht, alle nicht unbedingt zur Konstruktion erforderlichen Geraden zu vermeiden: Beim Radieren wird so die Zeichnung nicht so dicht sein, und sich deshalb nicht verschmieren (deshalb auch stets große Zeichnungen machen lassen), es erhöht sich so aber auch die Zeichengenauigkeit, wenn die Konstruktion Folge von möglichst wenigen Konstruktionsschritten ist. Die Darstellende Geometrie gibt so gute Beispiele für den Grundsatz der angewandten Mathematik: Man versuche, stets *möglichst viel mit möglichst wenigem Aufwand* zu erreichen.
Sicher schadet es nicht, eine Zeichnung ein zweites Mal unter Vermeidung aller unnötigen Linien fertigen zu lassen, etwa als Hausaufgabe.

8.5.2 Trotzdem kann nach Fertigstellung der Konstruktion der Laie i.a. kaum das Objekt im Liniengewirr wieder erkennen, wenn nicht jetzt unter Berücksichtigung der Sichtbarkeit Kanten und Umrisse des dargestellten Gegenstandes hervorgehoben werden.
Zweckmäßigerweise muß man hierzu einiges über die Darstellung sogenannter Rechtssysteme unterrichten:
Eine Rechtsdrehung ist eine Drehung im Uhrzeigersinn, was leider im Zeitalter der Digitaluhren für Schüler immer weniger einprägsam wird. Deshalb versuchen manche Didaktiker auf die Zuhilfenahme der Bewegung bei technischen Schrauben auszuweichen; die Erfahrung aber zeigt, daß i.a. Linkshändern und vor allem Mädchen diese Bewegung unbekannt ist.

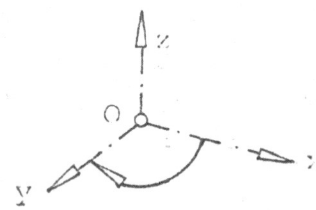
Ein Rechtssystem ist ein Koordinatensystem (O;x,y,z), dessen Achsen x,y,z in O paarweise aufeinander senkrecht stehen und wie folgt gerichtet sind: Dreht man die x-Achse 90° um O und bringt sie hierbei mit der y-Achse zur Deckung, sieht das Koordinatensystem von unten,

also in z-Richtung an, so hat man bei der Drehung x nach y eine Rechtsdrehung.
Große Schwierigkeit bereitet Schülern der Umstand, daß diese Drehung von x nach y bei einer Blickrichtung gegen die z-Achse eine Linksdrehung ist. Hier hilft nur viel Geduld bzw.:
In einer Ecke des Klassenzimmers markiert man die Achsen eines Rechtssystems, was man auch noch in der 9.Jahrgangsstufe benutzt. In der 10. Jahrgangsstufe wird dann die oben beschriebene Definition für Schüler verständlich, aber auch nur dann, wenn sie bereits in beschriebener Weise eine Zeit lang benutzt wurde.

Hat man das Schrägbild eines Rechtssystems samt den Verkürzungsmaßstäben in den Koordinatenrichtungen gegeben (sogenannte Axonometrie), dann kann man jeden Punkt abbilden, sobald man seine Koordinaten kennt. Jetzt kann man auch die Sichtbarkeitsverhältnisse entscheiden, jenachdem ob es sich bei der Abbildung um eine Untersicht oder Draufsicht handelt.



Draufsicht
x-y-Drehung gegen Uhrzeiger



Untersicht
x-y-Drehung im Uhrzeigersinn

Viel Spaß bereitet es Schülern zu sehen, daß aus denselben Konstruktionslinien je nach dem Umlaufsinn von den Bildern von x,y,z eine Unter- oder Draufsicht zu erhalten ist.

8.5.3 Als erste Konstruktionen im Schrägbild bieten sich an: Konstruktion der Höhe(mit Fußpunkt) einer Pyramide; ebener Schnitt eines Prismas.
Zweckmäßiger Weise werden die Konstruktionsschritte an der Zeichnung durchnumeriert (Parallelitäten durch kleine Striche sichtbar machen!) und in einem begleitenden Text begründet.

Literaturverzeichnis:

[1] Amtsblatt des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus Teil I: Sondernummer 7: Curricularer Lehrplan Mathematik für die Jahrgangsstufe 10 des Gymnasiums, Seite 201 - 210.

[2] Escher, M.C.: Graphik und Zeichnungen, Moos München 1967

[3] Hahn,Dzewas: Mathematik 7,Westermann Braunschweig 1979

[4] Kratz, J.: Geometrie 1, bsv München 1978

[5] Meyer, Kh.: Algebra und Geometrie, Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht, Hirschgraben 1980

[6] Meyer, Kh.: Propädeutik zur Raumanschauung, unveröffentlicht

[7] Reuleaux, F.: Die praktischen Beziehungen der Kinematik zu Geometrie und Mechanik, Braunschweig 1900 Vieweg & Sohn

weitere wissenschaftliche Literatur:

Hohenberg, F.: Konstruktive Geometrie in der Technik, Springer Wien

Reutter, F.: Darstellende Geometrie, Band I, Braun Karlsruhe

Strubecker, K.: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Vandenhoeck u. Ruprecht, Göttingen

Wunderlich, W.: Darstellende Geometrie I, Hochschultaschenbuch Mannheim

Giering-Seybold: Konstruktive Ingenieurgeometrie, Hanser München 1979

Lehrmittel:

[8] Wilau Lehrmittel GmbH, Robert-Bosch-Straße 27, 6140 Bensheim

Anschrift des Autors:

Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
8014 Neubiberg