

Dr. Karlhorst Meyer

Propädeutik zur Raumschauung.

Der Mathematikunterricht des Gymnasiums hat die Bedeutung der Geometrie im Anschauungsraum wiederentdeckt. Dies zeigt sich auch im Additum "Darstellende Geometrie" der 10. Jahrgangsstufe[2]. Letzteres Curriculum erreicht aber nur dann sein Ziel, wenn bereits im Unterricht der vorausgehenden Jahrgangsstufen Raumschauung propädeutisch gelehrt worden ist. Die im Curriculum auftretenden Raumprobleme können Schüler mit den Methoden der Darstellenden Geometrie (meist sogenannte Grundaufgaben) nur dann mit Erfolg meistern, wenn sie bereits in früheren Klassen an analoge Fragestellungen weniger exakt herangeführt worden sind und wenn bereits früher ihre eigene Vorstellungskraft hinreichend entwickelt wurde, daß jetzt im Additum in konzentrierter Form gelehrt werden kann.

Bei der Pflege der Raumschauung geht es nicht nur um die Vorbereitung eines Kapitels des Gesamtcurriculums, sondern vor allem um die Erhaltung eines Kulturgutes, das in anderen Kulturkreisen nicht immer so ausgeprägt vorhanden ist wie bei uns. Am Rande sei nur erwähnt, daß das Ingenieurwesen wie die Naturwissenschaften ohne das Sich-im-Raum-zurechtfinden undenkbar sind. Ingenieurwesen und Naturwissenschaften beleben so diesen Unterricht mit vielen Anwendungsbeispielen.

Die Propädeutik zur Raumschauungspflege wird von 2 Postulaten gelenkt:

1. Der Schüler muß lernen, sich im Raum zurecht zu finden.

Dies wird in verschiedenen Stufen erfolgen(siehe auch [4]):

Stufe 1: Ab dem 1. Schuljahr erfolgt eine systematische Schulung an konkreten Gegenständen. Bei diesem Z u r e c h t f i n d e n i m R a u m geht es nicht nur um das Erlernen geometrischer Begriffe (Kreis, Dreieck, Quadrat, Quader, Würfel usw.) sondern viel mehr um das Erkennen von oben, unten, vorne, hinten, links, rechts, innen und außen an konkreten Gegenständen (Würfel, Kugel usw.). Eine Sprache wird entwickelt, mit der man das Zurechtfinden im Raum beschreibt.

Stufe 2: Da der Raum in der Ebene bildlich dargestellt wird, muß man lernen, s i c h i m B i l d z u r e c h t z u f i n d e n, um zu verstehen, was dargestellt wird. Hierbei steht das Lesenlernen sowohl an Bedeutung wie auch in der zeitlichen Reihenfolge vor dem Selbstanfertigen von Zeichnungen. Auf dieser 2. Stufe wird man sich mit Sichtbarkeit von Linien usw. zunächst an für Kinder interessanten Gegenständen wie Haus, Auto, Möbel u.a.m. auseinandersetzen und schließlich a l l m ä h l i c h die mathematischen Grundflächen wie Würfel, Quader, Kugel usw. einerseits und die geometrischen Grundbegriffe wie Punkt, Gerade, Ebene, Kurve, Fläche andererseits einführen. Im 4. bis 6. Schuljahr sollte man an konkreten Fragestellungen Maße abschätzen lernen. Anschließend sollte die Raumschauung dazu dienen, durch echte Motivation an z.B. technischen Beispielen die mehr und mehr abstrahierten geometrischen Erkenntnisse zu illustrieren. Dies bleibt eine Aufgabe der Geometrie bis zur Reifeprüfung und noch darüber hinaus.

Stufe 3: Raumanschauung, auf noch so hohem Niveau erhält nicht Beweiskraft. Dies ist ihr wesentlichster Fehler. So brauchen wir neben der katalysatorischen Wirkung der Raumanschauung die synthetische und algebraische Methode der Geometrie um zu formalisieren und letztlich zu beweisen. Hierdurch aber erhält die Schulung der Raumanschauung eine 3. Stufe: Wir müssen lernen, die G e o m e t r i e d e r F o r m e l n z u e r k e n n e n, etwa im Formalismus der Spiegelungen in der Bewegungsgruppe. Z.B.: Man muß sich vorstellen können, daß das Produkt aus zwei Spiegelungen eine Drehung ist.

Stufe 4: Alle bisher genannten Stufen sind statisch. Raumanschauung wird erst dynamisch, wenn wir in ihr zu denken anfangen, d.h. wenn wir in unserer Vorstellung mittels unserer Raumanschauung P h a n t a s i e e n t w i c k e l n, z.B., wenn ein Ingenieur am Reißbrett einen komplizierten Bewegungsablauf entwirft und sich sicher ist, daß seine gerade entworfene Maschine auch läuft, ohne daß er ein Modell von ihr baut.

Es steht fest, daß wir nicht jeden Schüler bis zur Stufe 4 dieser sehr groben Gliederung führen können. Es wird sich vor allem bei den Stufen 3 und 4 um ein gelegentliches Angebot handeln, von dem wir nicht erwarten dürfen, daß es ein für alle Schüler erreichbares Lernziel wird.

Die Erkenntnis, daß Raumanschauung ein für alle Schulbereiche notwendiges Globallernziel ist, wird unseren Unterricht kaum verbessern, wenn wir nicht Konsequenzen ziehen:

- A. Die oft fehlende Raumanschauungspflege im Kunsterziehungsunterricht muß bewußt in den Mathematikunterricht eingebaut werden.
- B. Raumanschauungspflege wird die Unterrichtssequenz beeinflussen:
 - a) Am Anfang steht das M a c h e n: Warum nicht ein Experiment an den Anfang einer Unterrichtssequenz stellen (insbesondere bis zur 6. Jahrgangsstufe)? Anschließend wird dann das Experimentieren durch das Konstruieren bis hin zum Skizzieren sog. Analysisfiguren abgelöst werden. Auf ganz hohem Niveau wird dann dieses "Machen" ein Auffinden geeigneter Modelle sein.
 - b) Am Experiment, an der Analysisfigur oder im Modell wird man sich dann bemühen, etwas zu s e h e n, mathematische Zusammenhänge sichtbar zu machen, um sie zu erkennen.
 - c) Erst an letzter Stelle wird dann das S c h r e i b e n, also das Formalisieren und schließlich das Beweisen stehen.
- C. Lehrer, insbesondere Autoren sollten beim Fertigen ihrer Zeichnungen stets bemüht sein, die Raumanschauung des Schülers zu fördern, d.h. Fehler vermeiden, auch wenn diese beim Schüler verzeihbar sind.
- D. Wir müssen uns bemühen, daß unsere eigene Ausdrucksweise, also das, was wir selbst sagen, schreiben, rechnen und dann auch zeichnen stets so ist, daß wir uns später auf einem höheren Niveau des Spiralprinzips nicht zu korrigieren brauchen oder gar widerrufen müssen, was nicht bedeuten darf, daß wir den gleichen Maßstab für unsere Schüler verwenden.

2. *Der Schüler muß mit der Arbeitsweise des 2-Tafelverfahrens exemplarisch vertraut gemacht werden, ohne daß hierzu ein grundsätzlicher Unterricht über die Details und Zusammenhänge gegeben wird.*

Die anschließenden Beispiele werden dies verdeutlichen.

Es gilt noch zu klären, wann wieviel dieser Propädeutik zu lehren ist:

BIGALKE und HAMMER [3] verstehen PIAGET so, daß das Sich-im-Raum-zurechtfinden sich beim Jugendlichen so vollzieht, daß er zuerst topologische, später affine und erst zuletzt metrisch euklidische Erfahrungen verarbeitet. Deshalb empfehlen BIGALKE und HAMMER den Unterricht in der 5. Jahrgangsstufe mit topologischen Überlegungen zu beginnen. Da aber Zehnjährige mitten im Bastelalter stehen, dürfte wohl der von PIAGET beschriebene Ablauf längst vorbei sein. Deshalb dürften es gerade die metrischen Zusammenhänge im Raum sein, die altersgemäß unterrichtet werden können.

Im folgenden wird nun ein Beispielvorrat gegeben. Es handelt sich hier bei um kein Lehrplanmaß, wenn man auch nicht vergessen sollte, bei Gelegenheit den Schülern hieraus ein Angebot zu machen. In welchen Klassen dies frühestens geschehen kann, ist jeweils der ersten Zahl zu entnehmen. Doch können die Beispiele auch des öfteren in mehreren Klassen nacheinander verwendet werden, um im Sinne des Spiralprinzips dem Kern der Probleme immer näher zu kommen. Man schafft so bis zur 7. Jahrgangsstufe auch einen Beispielvorrat, der deutlich macht, weshalb ab Klasse 7 im Geometrieunterricht mehr Systematik erforderlich wird. Schließlich sei noch erwähnt, daß das eine oder andere Beispiel sehr gut für Vertretungsstunden geeignet ist.

5. Jahrgangsstufe:

Von Anfang an zielt der Geometrieunterricht darauf ab, zu zeigen: Wir erleben Geometrie im \mathbb{R}^3 , stellen dies aber in der Regel im \mathbb{R}^2 dar. Dort, wo es um die Vermittlung handwerklicher Fertigkeiten wie z.B. dem Konstruieren geht, beschränken wir uns auf das ebene Zeichnen, ohne dabei zu vergessen, daß diese Fertigkeiten auch im Raum anwendbar sind. Hierbei verzichten wir weitgehend auf Schreibweisen und Theoretisieren. Freunde von Folien und Arbeitsblättern stellen die Experimente bzw. das handwerkliche Vorgehen im Bild dar, ohne auf die Darstellungsschwierigkeiten zu sprechen zu kommen. Der Schüler soll anhand einer Beispielreihe lernen, Bilder zu lesen; hierzu benutzt er auch seinen Tastsinn, um den Eindruck eines Modells mit dem Bild desselben in Einklang zu bringen.

Während der Probezeit sollte räumliche Geometrie nicht unterrichtet werden.

5.1 Punkt, Gerade, Ebene:

5.1.1 Welcher Tisch steht besser, ein dreibeiniger oder ein vierbeiniger?

5.1.2 Das Anvisieren eines Punktes P ist nichts anderes, als das Feststellen, ob P auf einer durch zwei Punkte gegebenen Geraden liegt oder nicht

5.2 Namengebung, eine Idealisierung:

Die wenigsten Gegenstände, wie Kühlschrank, Buch, Spielwürfel, Meßbecher, die wir Quader, Zylinder usw. nennen, sind ... angenähert solche. Der Schüler lernt unterscheiden

- a) zwischen dem Objekt und seiner Idealisierung,
- b) zwischen dem Objekt bzw. seiner Idealisierung und deren ebenen Darstellung.

Es werden Objekte, Fotos und Zeichnungen derselben gegenübergestellt. Zu den Objekten werden idealisierende Modelle als Flächen- aber auch als Kantenmodelle gefertigt.

5.3 Kreis, Kugel:

Für einen 10-jährigen ist Abstand etwas, was er mit dem Maßstab messen kann. Deshalb kann man nach den ersten Versuchen mit dem Zirkel den Kreis durchaus als die Menge derjenigen Punkte erkennen, deren Abstand vom Mittelpunkt konstant ist. Doch sollte man dann nicht vergessen klar zu stellen, daß man dazusagen muß: "und die in einer Ebene liegen", um nicht die Punktmenge einer Kugel zu erhalten. Zu letzterem die folgende Frage:

5.3.1 Ein Gewichtstein hängt an einem Faden. Beschreibe die Gesamtheit aller möglichen Lagen des Steines.

5.4 Winkel:

Zwei sich schneidende Geraden liegen immer in einer Ebene, also mißt man einen Winkel jeweils in seiner Ebene. Doch sollte man auch Winkel an räumlichen Objekten messen:

5.4.1 Winkel am Würfel, Quader usw.

5.4.2 Man läßt auch Winkel zwischen Richtungen messen; so ergeben sich in natürlicher Weise Winkel zwischen windschiefen Geraden, ohne daß man hierzu eine eigene Namengebung einführen muß.

5.4.3 Mit einer Latte läßt man Ebenendiagonale oder Raumdiagonale im Klauzimmer anvisieren (siehe 5.1.2) und Winkel gegenüber anderen Richtungen, Geraden mit dem Tafelgeodreieck messen.

5.4.4 Wieviele Winkelmesser muß man an einem Fernrohr anbringen, um einen Stern so auszumessen, daß man ihn wieder finden kann, wenn man die zu messenden Winkel zu einer bestimmten Uhrzeit kennt.

Man erkennt die besondere Bedeutung des rechten Winkels.

5.5 rechter Winkel:

5.5.1 Ein dankbares Objekt ist der Quader (Modell mitbringen). Man stellt fest, daß für den Handwerker weniger das aufeinander senkrecht stehen von Geraden als vielmehr das Lot auf einer Ebene wichtig ist (Hinweis auf Senkblei).

5.5.2 Wann steht ein Pfahl senkrecht (auf einer Ebene)? Hierbei ist nicht gleichgültig, welche Ebene genommen wird zu einem Lot: Ein senkrechter Mast an einem schrägen Hang steht nicht auf dem Hang senkrecht. Wie oft muß man mit der Wasserwaage messen, um sicher zu sein, daß ein Pfahl senkrecht steht?

Bereits hier erweist es sich als vorteilhaft, daß der Schüler lernt, mit dem Zeichengerät zu spielen, d.h. in diesem Zusammenhang etwa das Folgende: Der Schüler A hält einen Bleistift lotrecht auf dem Tisch, während der Schüler B die rechten Winkel kontrolliert.

5.5.3 Errichte viele Lote auf der Erdoberfläche und betrachte diese aus dem Weltraum. Was stellst Du fest?

5.5.4 Wir haben kein Gefühl für Lotrecht: Fährt man in einer überhöhten Kurve, so kann man bei entsprechender Geschwindigkeit die Überhöhung nicht feststellen.

5.6 Winkel zwischen sich schneidenden Ebenen:

5.6.1 Die Schüler stellen als Hausaufgabe etliche Winkel aus Pappe her: z.B. 20° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90° . Sie bringen einen Pappkarton mit, der im Unterricht gefalzt wird und die beiden Falzhälften durch ein Streichholz auseinandergespreizt werden. Die Schüler versuchen die vorgefertigten Winkel so zwischen die beiden Falzhälften hineinzuschieben, daß der Scheitel jeweils auf der Schnittgeraden liegt und die Schenkel die beiden Ebenen berühren. Offenbar gibt es zwischen zwei Ebenen viele Winkel; doch findet man auch, daß es einen kleinsten gibt. Letzterer hat die Eigenschaft, daß offenbar seine Schenkel auf der Schnittgeraden senkrecht stehen. Diesen Winkel nennt man **d e n** Winkel zwischen den beiden Ebenen.

Bemerkung: Dieses sicher sehr wichtige Beispiel sollte nicht dazu mißbraucht werden, daß hieraus eine strenge Definition - und wenn schon "nur" mündlich-gemacht wird; sondern es geht hierbei eigentlich um viel mehr: Durch Beispiele dieser Art muß dem Lernenden irgendwann einmal im Unterrichtsgeschehen klar gestellt werden, daß das schwierige Definieren in der Mathematik irgendwo seine natürlichen Quellen hat, oder anders ausgedrückt: Der gesunde Verstand reicht aus, sinnvolle Definitionen zu finden.

5.6.2 Wie muß ein Handwerker seinen Winkel halten, wenn er überprüfen will, ob zwei Wände miteinander einen rechten Winkel bilden?

5.6.3 Wo findet man am Quader rechte Winkel zwischen Ebenen, zwischen Ebenen und Kanten, weitere rechte Winkel? Die Fragestellung kann in "guten" Klassen auch mit kombinatorischen Fragestellungen verknüpft werden. Hinweis: Man beachte auch die rechten Winkel zwischen Diagonalen und Kanten.

5.7 Nullwinkel, Parallelität:

Parallele Geraden im Raum führt man wohl zweckmäßiger Weise als Geraden einer Ebene ein, die sich nicht schneiden. Im Nachhinein stellt man fest, daß zwischen parallelen "Dingen" der Winkel sinnvoller Weise als Nullwinkel bezeichnet wird.

5.7.1 Parallele Kanten am Quader (= Klaßzimmer).

5.7.2 Parallele Ebenen am Quader (= Klaßzimmer).

5.7.3 Welche Geraden sind am Quader parallel zu Ebenen?

Bei den vorliegenden Beispielen sollte man sich bemühen, Lösungen in der Umgangssprache zu finden.

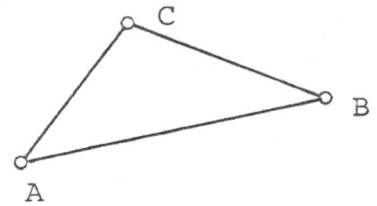
5.8 Winkelsumme im Dreieck:

Die Winkelsumme im Dreieck ist sicher einer der ersten Geometriesätze, die der Schüler durch Messen entdeckt. Der Lehrer weiß, daß es sich hierbei um ein Axiom der EUKLIDischen Geometrie handelt, er weiß aber auch, daß Messungen keine Beweiskraft haben. Für den Schüler ist das Gemessene wahr, da er von verborgenen Voraussetzungen noch nichts erfahren hat. Nun kann man geteilter Meinung sein, ob man als Lehrer schon in einer 5.Klasse diese Einstellung des Lernenden durch ein Gegenbeispiel zu erschüttern hat. Doch so lange das Curriculum in Erdkunde am Anfang der 5.Jahrgangsstufe die Allgemeine oder auch

Mathematische Geographie stellt, kann es nur gut sein, wenn der Mathematikunterricht altersgemäß etwas auf das Grundsätzliche eingeht:

Die Schwierigkeiten entstehen hier weniger aus der Sache, die man sehr schön an einer Kugel demonstrieren kann, als vielmehr darin, daß man dem Schüler etwas aufschreiben lassen muß, was scheinbar ohne Zeichnungen unmöglich ist, vor allem dann, wenn der Lehrer die Zeichnungen an der Tafel vorzeichnet und erwartet, daß Schüler der 5. Jahrgangsstufe in der Lage sind, mitzuzeichnen. Deshalb sei im folgenden ein einschlägiger Heftext wiedergegeben (Übrigens hat man auch in der 7. Jahrgangsstufe die gleiche Schwierigkeit zu überwinden, wenn die Äquivalenz zwischen 5.7 und dem EUKLIDischen Parallelenaxiom hergestellt wird.):

5.8.1 Ein Flugzeug fliegt von A nach C längs der Leitfeuer (gezeichnete Route der nebenstehenden Skizze) über B. Bei dem "Wendefeuer" B dreht es sich um den Winkel $\sphericalangle ABC$. Experimentell stellt man fest: Durchfliegt das Flugzeug das Dreieck ABC genau einmal, so hat es sich insgesamt um 180° gedreht (Zweckmäßiger Weise läßt man die Schüler vorher schätzen: Meistens hört man das Ergebnis 360° !).



5.8.2 An einem Modell zeigt man: Die (Erd-)Kugel entsteht durch Drehen eines Kreises um die Gerade durch den Nord- und Südpol. Jede Lage des sich drehenden Kreises heißt Meridian oder Längengrad.

5.8.3 Schneidet man die Nord-Süd-Achse mit einer senkrechten Ebene, so trifft diese die Kugel in einem Breitenkreis. Es gibt kleine und große Breitenkreise. Der Äquator ist der größte Breitenkreis und damit gleich groß mit jedem Meridiankreis.

5.8.4 Unser Flugzeug fliegt vom Nordpol längs dem 0-ten Meridian bis zum Äquator, wendet dort nach Osten (90° -Drehung!) und überfliegt Afrika bis zum 40-ten Meridian östlich von Greenwich und wendet nach Norden (90° -Drehung!). Anschließend fliegt die Maschine längs eines Meridians wieder zurück zum Nordpol.

- Wie groß ist beim Nordpol der Winkel zwischen der Abflug- und Anflugsrichtung?
- Wie groß ist die Winkelsumme des durchflogenen Dreieckes?
- Welches Dreieck auf Meridianen und Äquator muß das Flugzeug fliegen, um eine möglichst große Winkelsumme zu erreichen?

5.9 Prisma und Pyramide:

5.9.1 Ein gerades Prisma soll aus Zeichenpapier hergestellt werden: Zu diesem Zweck betrachtet die Klasse ein Modell und stellt fest: Alle Seitenflächen sind Rechtecke, alle Rechtecke haben dieselbe Höhe, die Breiten der Rechtecke kommen auch vor als die Kantenlängen der deckungsgleichen Grund- und Deckelfläche. Einem Schüler, der sich mitten im Bastelalter befindet, ist es selbstverständlich, daß man nicht jede dieser Flächen einzeln herstellt, sondern durch Falten erreichen kann, daß mehrere, u.U. alle zusammenhängend ausgeschnitten werden können. Es entsteht eine Abwicklung (dieser Begriff bleibt unerwähnt), die die Schüler bereits vom Ausschneiden und Kleben von Papierhäusern kennen. Knüpft man im Unterricht an diese Erfahrung der Kinder an, so ist die eben beschriebene Aufgabe sicher nicht für eine 5. Jahrgangsstufe zu schwer.

Um hieraus einen für den Geometrieunterricht bleibenden Nutzen zu ziehen, empfiehlt sich die folgende Fragestellung:

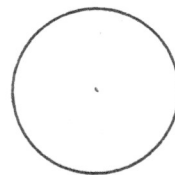
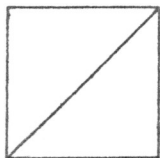
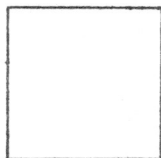
5.9.2 In zwei vermaßten Ansichten (Giebelansicht, Ansicht längs des Firstbalkens) wird ein Haus mit Satteldach gegeben. Wieviele Dachziegel benötigt der Dachdecker, wenn er davon ausgeht, daß er i.a. für einen Quadratmeter eindecken 46 Ziegel benötigt. Sollten Maße in den beiden Zeichnungen fehlen, so entnimmt der Schüler die Maße der Zeichnung durch Messen; dies bereitet keine Schwierigkeit, da dem Schüler aus dem Geographieunterricht der Begriff Maßstab geläufig ist.

Bei dieser Aufgabe geht es also um das wichtige *Bilder lesen*. Hierzu brauchen die Schüler keine Kenntnisse aus der Darstellenden Geometrie. Ganz im Gegenteil: Die Erklärung der Darstellenden Geometrie für das Entstehen solcher Bilder kann man erst verstehen, wenn man bereits vorher solche Bilder hat lesen können.

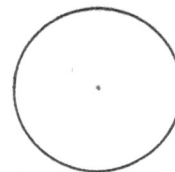
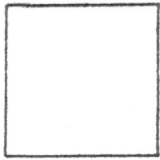
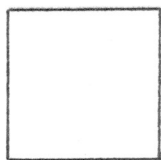
Man kann begeisterte Schüler der 5. oder 6. Jahrgangsstufe erleben, wenn man etwa in einer Vertretungsstunde die folgende Aufgabe stellt:

5.9.3 Um welche Körper handelt es sich, wenn man von ihnen die folgenden Ansichten hat:

von vorne



von oben



5.9.4 Bei entsprechender Vorübung kann man es sogar wagen, als Hausaufgabe eine quadratische, gleichseitige Pyramide basteln zu lassen, von der die Höhe und das Grundquadrat gegeben sind:

Wie bei 5.9.1 finden die Schüler an einem mitgebrachten Modell, daß die Abwicklung ein 4-strahliger Stern ist. Um die Abwicklung aus-schneiden zu können, muß man aus den "in der Aufgabenstellung vernünftig gegebenen" Maßen die Seitenkantenlänge der Pyramide erhalten. Der folgende Weg wurde ausprobiert:

Auf der Quadratmitte (Diagonalenschnittpunkt, dieser Begriff bleibt unerwähnt) errichtet der Schüler ein Lot (z.B. durch Ankleben eines Hilfsdreiecks) der gewünschten Höhe und mißt die gewünschte Kantenlänge. Ganz schlaue Schüler kommen dann selbst darauf, daß man das gleiche hätte exakter erhalten können, wenn man ein geeignetes recht-winkeliges Dreieck konstruiert hätte.

5.10 Spiegelungsgeometrie:

Man sollte nicht die Spiegelung im dreidimensionalen Raum vergessen, da es ja gerade diese sind, die zur Namengebung führen. Außerdem ist die Spiegelung an einer Geraden zunächst für den Schüler eine unnatür-

liche Sache.

5.10.1 Mit einem Kreidestrich wird der Schülertisch halbiert. Man stellt sich über dem Kreidestrich eine Ebene senkrecht zum Tisch vor. Der eine Schüler gibt auf dem Tisch einen Punkt vor, der andere Schüler findet - nach Augenmaß - dazu den Spiegelpunkt bezüglich der gedachten Ebene. Der eine Schüler hält irgendwie einen Bleistift, der andere sucht hierzu das Spiegelbild, indem er seinen Bleistift richtig zu halten versucht, damit dieser das Spiegelbild zeigt (Der Schüler muß lernen, mit dem Zeichengerät zu spielen).

5.10.2 Fortsetzung von 5.10.1: Man nimmt ein Blatt Papier und legt es auf ein Zeichendreieck als Stützdreieck (dieser Begriff bleibt unerwähnt). Der andere Schüler sucht mit seinem Gerät das dazugehörige Spiegelbild.

5.10.3 Setzt man 2 Spiegelungen der Ebene zu einer ebenen Drehung zusammen, so sollte man nicht auf eine räumliche Interpretation verzichten: Schneiden sich die beiden Spiegelebenen in einer Geraden a , so ist das Nacheinanderausüben der beiden Spiegelungen an diesen Ebenen eine Drehung um a . Ähnlich führt die ebene Verschiebung zur räumlichen, oder die Punktspiegelung in der Ebene zur räumlichen Umwendung, d.h. zu einer Spiegelung an einer Geraden. Die zuletzt genannten Aufgaben sollten nur in Angriff genommen werden, wenn das Gespräch auf die entsprechenden ebenen Probleme führt.

5.10.4 Spricht man von Symmetrie, so sollte man es nicht versäumen, dem Schüler an bekannten und unbekanntem Gegenständen die Symmetrie untersuchen zu lassen. In einer 5. Jahrgangsstufe sind hierbei die greifbaren Gegenstände sicher sinnvoller als die Abstrakta Quadrat, Rechteck, Kreis u.v.m. Man untersucht die Symmetrie und die dazugehörigen Spiegelungsachsen bzw. Ebenen an Gebäuden, Parks, aber auch an Mustern u.ä. Das können hierbei gute Dienste leisten.

5.11 Längenmessung:

Auch wird empfohlen, einen Zusammenhang mit der Geometrie unseres Erfahrungsraumes herzustellen:

5.11.1 Wie viele "laufende" m Holzlatten werden benötigt, um ein Kantenmodell eines Würfels der Kantenlänge 2m herzustellen. Die Bastler unter den Schülern werden natürlich feststellen, daß hier keine Aussage gemacht werden kann, wenn man nicht etwas über die Querschnittsmaße der Latten weiß; deshalb muß man u.U. den Zusatz geben: Das Ergebnis sei eine "erste Näherung"; letzteres in der Bedeutung, daß das Ergebnis nur so ungefähr zu stimmen hat.

Diese Aufgabe kann in guten Klassen variiert werden: Es werden anschließend Kantenmodelle von Prismen und Pyramiden untersucht.

5.11.2 Ein Paket wird verschnürt; fertige eine Skizze, die zeigt, wie Du das Paket verschnüren willst und berechne, wieviel Schnur Du hierzu mindestens benötigst. Warum heißt es "mindestens"?

Vor dem Berechnen läßt man die Schüler das Ergebnis schätzen.

5.12 Darstellung:

All diese einführenden Überlegungsbeispiele sollen keine Schreibschwierigkeiten verursachen. Die genannten Beispiele werden phänomenologisch behandelt und heuristisch notiert; d.h. als Unterrichtsprotokoll erscheint in den Schülerheften nur ein "vager" Text mit Bildern über die jeweilige Aufgabenstellung. Der Lehrer wird ge-

legentlich an der Tafel Bilder malen müssen. Hierzu wird er wohl meist die Darstellungsform Schrägbild wählen. Er kann aber auch sogenannte Orthogonalrisse bringen, wenn er z.B. einfach erklärt: Betrachten wir einen Würfel, der auf dem Fußboden steht, von oben, dann sehen wir ein Quadrat usw.

6. Jahrgangsstufe:

Der Geometrieanteil an der 6. Jahrgangsstufe ist gering; deshalb sollte man bemüht sein, in den Sachaufgaben des Bruchrechnens immer wieder geometrische Beispiele auch aus der räumlichen Geometrie einfließen zu lassen, um die Raumanschauung der Schüler weiter zu prägen. Gibt man insbesondere die Berechnungsformeln für die Volumina von Kegel und Kugel an, so kann man einerseits Einsetzübungen einfachster Art üben, aber auch auf die in 5.2, 5.3, 5.9 usw. angeschnittenen Themen erstmalig oder zur Wiederholung zu sprechen kommen.

6.1 kgV und ggT:

Auch außerhalb des Bruchrechnens benötigt man kgV und ggT. Die folgenden Aufgaben sind räumliche Beispiele aus MEYER [5]:

6.1.1 Für einen LKW-Typ, dessen Laderaum die Innenmaße 600 cm mal 240 cm mal 180 cm hat, soll ein möglichst großes, würfelförmiges Paket entwickelt werden, mit dem man den LKW restlos füllen kann. Welche Kantenlänge hat das Paket, wie viele Pakete gehen in den LKW?

6.1.2 Kisten der Höhe 1224 mm werden neben Kisten der Höhe 936 mm gestapelt. Ist es möglich, innerhalb einer Lagerhalle der Höhe 7000 mm zu erreichen, daß die beiden Stapel gleich hoch sind?

6.2 Quaderoberfläche:

6.2.1 Wieviel Papier braucht man mindestens, um eine vermaßte, quaderförmige Pappschachtel innen und außen mit Papier zu bekleben? Warum heißt es "mindestens".

6.2.2 Wieviel Farbe benötigt ein Maler, um die Fassade eines quaderförmigen Hauses anzustreichen? Hinweis: Die Fensteröffnungen spielen bei der Berechnung keine Rolle. (Warum?)

Es werden die Hausmaße vorgegeben, bzw. wieviel Farbe der Maler für einen Quadratmeter benötigt.

6.2.3 Auch das Zerschneiden bzw. Zusammensetzen von Flächen sollte laufend an immer schwerer werdenden Beispielen geübt werden. Hier bietet sich die folgende Fragestellung an: Die Problemstellung von 6.2.2 wird auch an einem L- oder U-Bungalow wiederholt.

Schließlich kann man auch berechnen lassen, wieviel Teer für einen Dachanstrich benötigt wird.

6.3 Quadervolumen:

Zusammensetzungen, Zerlegungen, Anordnen oder Umordnen im Raum fallen oft dem Schüler schwer, weil dies nicht frühzeitig genug an einfachen Beispielen geübt wurde.

6.3.1 Man läßt das Volumen des umbauten Raums der Häuser von 6.2.3 berechnen. Weitere Beispiele findet man in MEYER [5] unter A.2.1, G.9.1 und G.9.2.

6.3.2 Welches Steinvolumen braucht man, wenn man um den Erdball (Radius $r = 6000$ km) eine Mauer der Höhe von 1 m und der Breite von 20 cm bauen wollte?

6.3.3 Wieviel Kupferdraht von 1 mm^2 Querschnitt kann man aus 1 dm^3 ziehen?

6.4 Prozentrechnung, Proportionalität:

Sehr oft werden bei den Prozentrechnungen oder auch beim Zusammenhang der Proportionalität nur kaufmännische, beim Letzteren wohl gelegentlich auch physikalische Beispiele gebracht. Es gibt aber auch geometrische Beispiele, auch im Hinblick auf die räumliche Geometrie:

6.4.1: Eine Eisenbahnstrecke, die immer gleichmäßig steigt, gewinnt auf den ersten 5 km 8 m an Höhe.

a) Wie viele Prozent beträgt die Steigung der Strecke?

b) Welche Höhe gewinnt die Strecke auf 13 km Länge?

Beachte: Es spielt hierbei offenbar keine Rolle, daß die Strecke geschlängelt durch die Landschaft geführt ist: Um dies zu verdeutlichen bringt der Lehrer ein "Stützdreieck" mit, verbiegt es so, daß er es über eine an die Tafel gezeichnete Eisenbahnstrecke halten kann. Der Begriff "Stützdreieck" bleibt unerwähnt.

Die Deutsche Bundesbahn versteht unter Steigung den Quotienten aus Weglänge und Höhendifferenz, wohingegen die Straßenbauämter i.a. den Quotienten aus Kartenweg und Höhendifferenz verstehen.

Worin besteht der Unterschied? Um hier eine vernünftige Rechnung durchzuführen, entnimmt man dem oben erwähnten Dreieck durch Messung die Seitenlängen und berechnet die beiden Prozentsätze.

Von Anfang an sollte der Zusammenhang zwischen Proportionalität und Linearität unbewußt deutlich gemacht werden:

6.4.2: Verdoppelt man eine Seite eines Rechteckes, so verdoppelt sich seine Fläche; man sagt: die Fläche ist zu jeder ihrer Seiten proportional.

Sind auch die Quadratflächeninhalte proportional zur Kantenlänge? Finde ein Gegenbeispiel.

Ist der Rauminhalt eines Würfels proportional zu seiner Kante? Finde ein Gegenbeispiel.

Literaturverzeichnis:

- [1] Amtsblatt des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus Teil I: Sondernummer 15: Curricularer Lehrplan Mathematik für die 5. bis 8. Jahrgangsstufe des Gymnasiums, Seite 499- 543.
- [2] Amtsblatt des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus Teil I: Sondernummer 7: Curricularer Lehrplan Mathematik für die Jahrgangsstufe 10 des Gymnasiums, Seite 201 - 210.
- [3] Bigalke, Hammer: Einführung in die Mathematik, 5.Schuljahr, Methodische Hinweise und Lernziele, Diesterweg Frankfurt 1975, Seite 17

- [4] Meyer, Karlhorst: Stufung der Raumanschauungspflege, Poster 3.ICME
Karlsruhe August 1976.
- [5] Meyer, Karlhorst: Algebra und Geometrie, Anwendungsaufgaben im
Mathematikunterricht Band 1, Hirschgraben, Frank-
furt/Main 1980

Anschrift des Autors:

Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
8014 Neubiberg