M A T H E M A T I K I N F O R M A T I O N
GYMNASIUM STARNBERG
FACHBEREICH MATHEMATIK

NR. 3
2. 3. 1981

Dr. Karlhorst Meyer

Eine Alternative zur Theorie der zentrischen Streckungen.

Im zweiten Teil der Mittelstufengeomtrie geht es um das rechnerische Erfassen des uns umgebenden Anschauungsraumes. Wenn sich auch die Mehrzahl der Methodiker stets einig war, daß hierbei nicht genauer, d.h. axiomatisch festgelegt wird, was unter diesem Anschauungsraum zu verstehen ist, so gingen doch Grundlagenergebnisse, wie man sie bei ARTIN [1] Seite 54 und folgende findet, nicht spurlos am Mittelstufenunterricht vorbei. Nur so läßt sich verstehen, weshalb der für die 9.Jahrgangsstufe so zentrale, für die spätere Anwendung so wichtige Strahlen- oder Vierstreckensatz im Rahmen der Abbildungsgeometrie nur noch als eine Anwendung der Theorie der zentrischen Streckungen (bei ARTIN Dilatationen) erscheint; ARTIN zeigte nämlich, daß auf jeder affinen Ebene zentrische Streckungen agieren, also insbesondere auch, wenn noch keine Metrik zur Verfügung steht. Solche Raffinessen sollten aber am Gymnasium im Hintergrund bleiben; deshalb wird im Folgenden eine nicht neue Alternative zu vielen unter dem Einfluß der Abbildungsgeometrie stehenden Lehrbüchern angeboten. Die Alternative berücksichtigt folgende Zielsetzungen:

Zielsetzungen:

1. Grundlagengesichtspunkte, die keine didaktischen Vorteile bringen, bleiben im Schulunterricht unberücksichtigt; dies gilt vor allem dann, wenn versucht wird, eine mathematische Theorie mit einem minimalen Axiomensystem zu begründen. Im Geometrieunterricht der Mittelstufe bemüht sich der Lehrer, vor allem den Anschauungsraum als Ganzes im Hinblick auf die Anwendbarkeit der Theorie in unserer Umwelt dem Schüler nahe zu bringen.

2. Wenn im Folgenden der Strahlensatz direkt aus den Kenntnissen der 8.Jahrgangsstufe hergeleitet wird, geschieht dies nicht, um die Verdienste der Abbildungsgeometrie zu schmälern. Gerade im Hinblick auf die große Bedeutung der zentrischen Streckungen im Anwendungsbereich der Mathematik, aber auch innerhalb der Mathematik, z.B. bei der sogenannten S-Multiplikation im Vektorraum u.v.a. wird der Lehrer sich bemühen, nach dem Beweis des Strahlensatzes in voller Breite Abbildungsgeometrie zu betreiben.

3. Die folgende Methode wird angeboten, weil durch diese Umstellung der Lerninhalte des CULP [2] Zeit gewonnen werden kann, die zur Vertiefung der Lerninhalte im Anwendungsbereich, aber auch im Bereich der Raumanschauung genutzt werden kann.

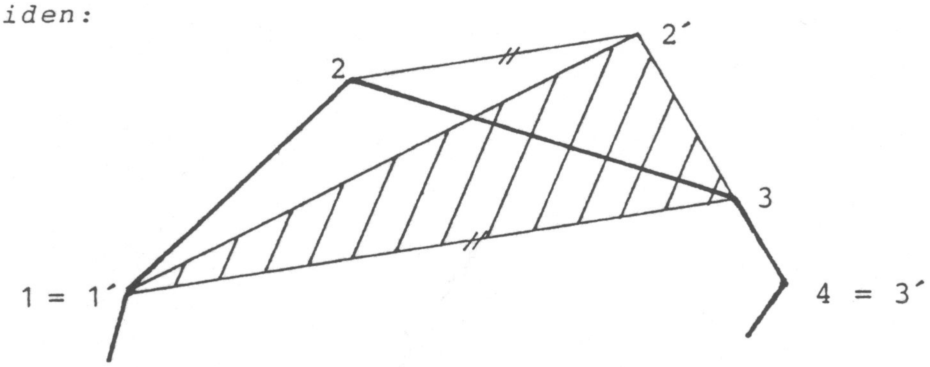
4. Ein Curriculum der Mittelstufe sollte kurze Gedankengänge insbesondere kurze Beweise (nicht länger als 20 min Unterrichtszeit) bevorzugen; denn nur so hat der Lehrer die Chance, daß Schüler gelegentlich Teile des Weges selbst auffinden.

5. Begriffsbildungen wie kommensurable Strecken u.a. sind nur noch historisch bedeutsam, sollten also zukünftig in den Hintergrund treten, weil sie für die Benutzung des Strahlensatzes keine Rolle spielen. Das Verständnis für die Problematik der kommensurablen Strecken ist in natürlicher Form gegeben, wenn mit dem Satz des

PYTHAGORAS die Existenz von $\sqrt{2}$ auf der Zahlengeraden gezeigt wird.

§1 Beweis der Vierstreckensätze und deren Umkehrungen.

Die Flächenberechnung von Quadrat, Rechteck, aber dann auch Dreieck, Parallelogramm und Trapez aus der 8.Jahrgangsstufe eröffneten dem Unterricht neue Möglichkeiten. Man wiederholt die sogenannte *Scherbenmethode*, mit der man alle Polygonflächen berechnen kann, insbesondere die Grundmethode hierbei, die *Scherung von Teilflächen oder das Eckenabschneiden:*



Übungsaufgaben (auch Hausaufgaben) führen zu den folgenden Ergebnissen:

<u>1.1 Satz:</u> Die Flächeninhalte von Dreiecken mit derselben Grundlinie verhalten sich wie die dazugehörigen Höhen.

<u>1.2 Satz:</u> Die Flächeninhalte von Dreiecken mit derselben Höhe verhalten sich wie die dazugehörigen Grundlinien.

<u>1.3 Satz:</u> Dreiecke mit einem gemeinsamen Winkel haben Flächeninhalte, die sich wie die Produkte der Längen der dem Winkel anliegenden Seiten verhalten.

Man wird dies alles erhalten, ohne auf die Unabhängigkeit der Quotienten von der speziellen Maßzahl eingehen zu müssen.

In der folgenden Stunde wird das Arbeitsblatt (Seite 3) verteilt. Es entstand in Anlehnung an SCHRÖDER-UCHTMANN [6] Seite 22. Das Arbeitsblatt liegt im Overheadprojektor und gleichzeitig entsteht an der Tafel schrittweise die Figur zu 6.

zu 1. Man wählt im Dreieck ABC einen beliebigen Punkt D auf AB.

zu 2. Man ergänzt die Figur. Parallelenstriche zeigen an ED $\parallel$ BC.

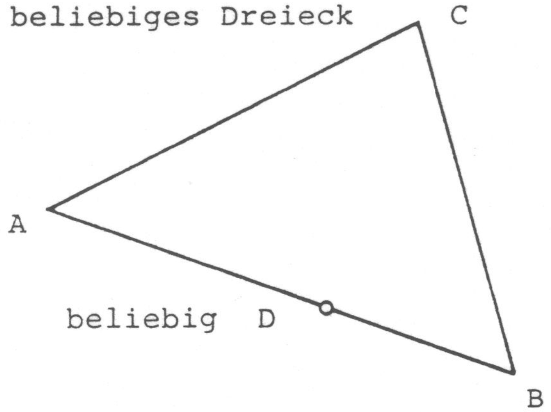
zu 3. Die Schüler denken an die "Scherbenmethode" bzw. an den "Scherensatz" und finden $F_{EDB} = F_{EDC}$.

zu 4. Durch Hinzunahme von F_{ADE} erhält man $F_{ABE} = F_{ADC}$.

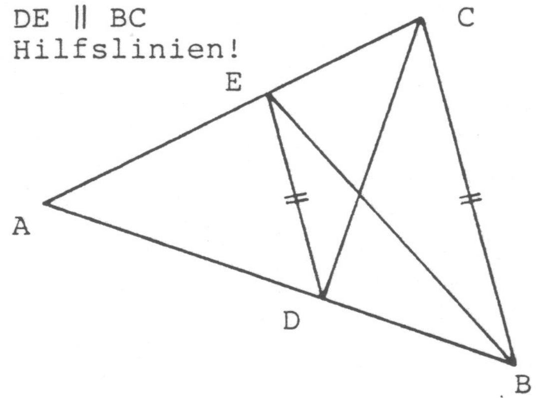
Arbeitsblatt:

H e r l e i t u n g d e s S t r a h l e n s a t z e s

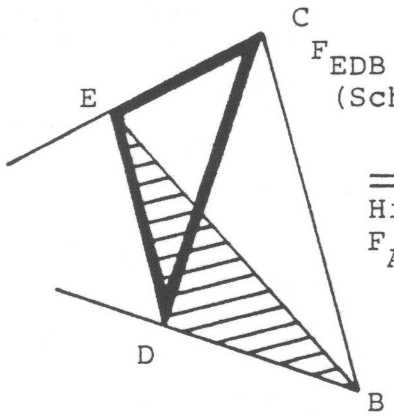
1. beliebiges Dreieck



2. $DE \parallel BC$
Hilfslinien!



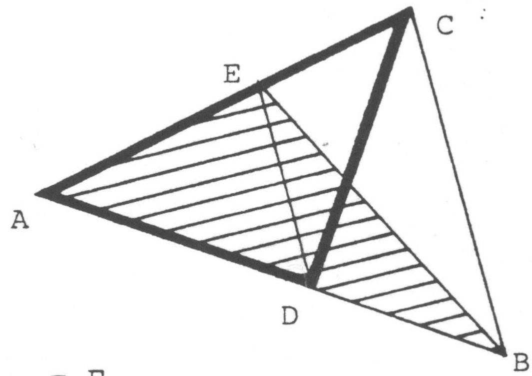
3.



$F_{EDB} = F_{EDC}$
(Scherungssatz)

⟹ Hinzunahme von F_{ADE}

4.



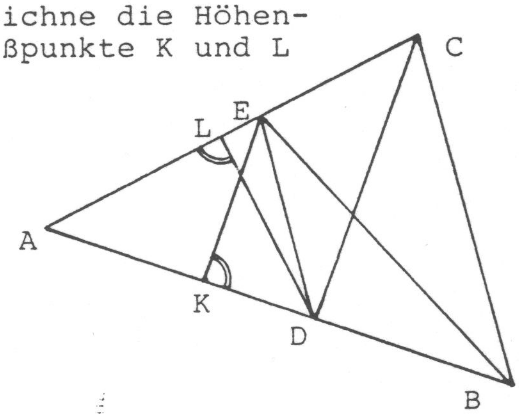
$F_{ABE} = F_{ADC}$

5. $\xRightarrow{\text{Algebra}}$

$$\frac{F_{ADE}}{F_{EDB}} = \frac{F_{ADE}}{F_{EDC}} \qquad (1)$$

$$\frac{F_{ADE}}{F_{ABE}} = \frac{F_{ADE}}{F_{ADC}} \qquad (2)$$

6. Zeichne die Höhenfußpunkte K und L



7. $$\text{Dreiecksfläche} = \frac{\text{Grundlinie mal Höhe}}{2} \qquad (3)$$

8.

$$\xRightarrow{\text{aus (1) und (3)}} \quad \frac{\frac{1}{2}\,\overline{EK}\cdot\overline{AD}}{\frac{1}{2}\,\overline{EK}\cdot\overline{DB}} = \frac{\frac{1}{2}\,\overline{DL}\cdot\overline{AE}}{\frac{1}{2}\,\overline{DL}\cdot\overline{EC}} \text{ oder } \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \qquad (4)$$

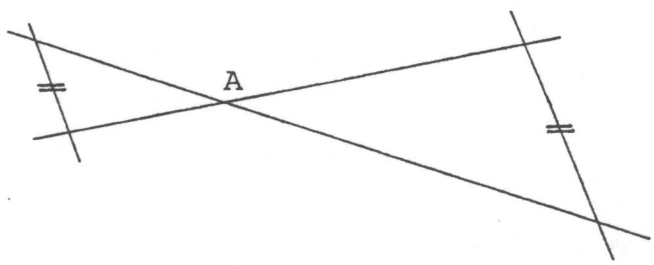
$$\xRightarrow{\text{aus (2) und (3)}} \quad \frac{\frac{1}{2}\,\overline{EK}\cdot\overline{AD}}{\frac{1}{2}\,\overline{EK}\cdot\overline{AB}} = \frac{\frac{1}{2}\,\overline{DL}\cdot\overline{AE}}{\frac{1}{2}\,\overline{DL}\cdot\overline{AC}} \text{ oder } \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \qquad (5)$$

zu 5. Auf Grund der Entwicklung 1. bis 4. kann der Schüler die Behauptungen (1) und (2) leicht als richtig erkennen. Hier wird sehr deutlich, daß die Schwierigkeiten beim Beweisen nicht im Nachvollziehen einer Beweisidee, sondern im Auffinden einer solchen zu suchen sind. In der Tat nimmt das Arbeitsblatt dem Schüler völlig das Auffinden der Beweisidee ab; das einzige, was vom Schüler hier noch geleistet wird, so wird der Kritiker feststellen, besteht in der Erkenntnis, daß die Strahlensätze richtige Aussagen sind. Nun ist die Entscheidung, wann man einen Satz, eine Lösungsstrategie dem Schüler entdecken läßt, oder wann man ihm einfach einen Sachverhalt und dessen Begründung vorträgt, eine Standpunktfrage für den Lehrer, wohl auch oft ein Zeitproblem. Sicher können beide Methoden zu einem guten Unterricht führen. Ich bin der Meinung, daß das hier beschriebene Vorgehen im Fall des Strahlensatzes schüleradäquat ist, weil ich der Überzeugung bin, daß sowohl das Auffinden des Satzes, wie auch dessen Beweis für Schüler zu schwer sind. Man sollte allerdings auch nicht glauben, daß der Weg einiger Schullehrbücher zum Vierstreckensatz über die zentrischen Streckungen von Schülern selbständig ohne Suggestion durch den Lehrer gefunden werden kann; denn wäre dies anders, wäre unverständlich, daß die Mathematik seit EUKLID [3] 2000 Jahre hierzu benötigt hat.

zu 6. bis 8. Auf Grund der Erfahrungen 1.1. bis 1.3 können Schüler jetzt selbst auf die Idee kommen, sich die Flächeninhalte von (1) und (2) genauer anzusehen, d.h. die entsprechenden Höhen mit ins Spiel zu bringen. Schüler haben aber leider meist so ein Geschick, daß sie die verkehrten Höhen nennen. Deshalb kann die folgende Frage weiterhelfen: "Wir wollen eine algebraisch möglichst einfache Beziehung aus (1) und (2) ableiten; was wäre algebraisch hierzu ideal?" Man findet: Jeweils zwei Dreiecke haben dieselbe Höhe, die sich dann jeweils in den Formeln kürzen läßt.

Nun kann man zwar die Formeln (4) und (5) aus 1.3 viel schneller herleiten, als dies hier geschehen ist. Doch hat man dann den Nachteil, einen Beweis der Vorstunde benutzen zu müssen, was manchen Klassen grundsätzlich Schwierigkeiten (z.B. NG-Klassen) bereitet. Außerdem zeigt die Lehrerfahrung, daß 1.3 oft unverstanden bleibt, daß Schüler diesen Satz nur schlecht im Gedächtnis behalten können und oft schon in der nächsten Stunde nicht mehr den Zusammenhang mit der Dreiecksflächenformel sehen.

Jetzt wird der Strahlensatz, vor allem seine Voraussetzungen, scharf formuliert. Abgesehen von dem Glücksumstand, daß Schüler die Voraussetzungen schlecht formulieren, wird wohl der Lehrer die folgende Figur anzeichnen und als Hausaufgabe untersuchen lassen, ob auch hier entsprechende Aussagen gelten. Dem Schüler hilft eventuell der Hinweis, daß die Anwendung einer Bewegung (Punktspiegelung an A) auf eines der Dreiecke weiterhilft.

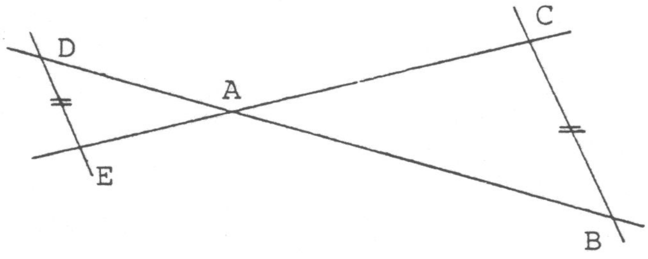


<u>1.4 Satz (1.Strahlen- oder Vierstreckensatz):</u> Zwei Geraden g und h schneiden sich in A. Beide Geraden werden von den verschiedenen Parallelen p und q so geschnitten, daß auf beiden Parallelen A nicht liegt (siehe die Figur).

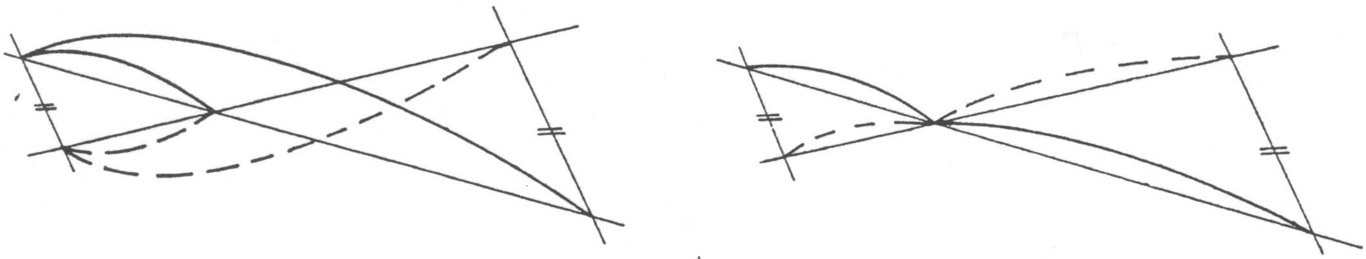
Dann gilt:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \quad (4)$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \quad (5)$$



Schüler sollen sich diesen Satz sicher nicht dadurch merken, daß sie die Formeln (4) und (5) auswendig lernen. Es scheint zweckmäßig zu sein, sich den Satz samt seiner Voraussetzungen optisch zu merken. Man zeichnet sich Bögen gleicher Farbe an die Strecken, die zu einem Quotienten in (4) oder (5) gehören (hier sind aus drucktechnischen Gründen die verschiedenen Farben durch verschiedene Stricharten angezeigt).



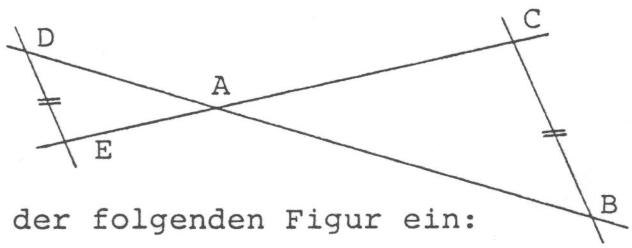
Einige einfache Anwendungsaufgaben der Geodäsie sind bereits hier angebracht.

Auch auf die dritte Form des Strahlensatzes wird der Lehrer die Schüler aufmerksam machen müssen, es sei denn, daß die Schüler durch Messung auf 1.5 als Vermutung stoßen, was auch am Gymnasium gelegentlich ein nützliches Vorgehen ist. Man erhält also die *suggerierte Vermutung*:

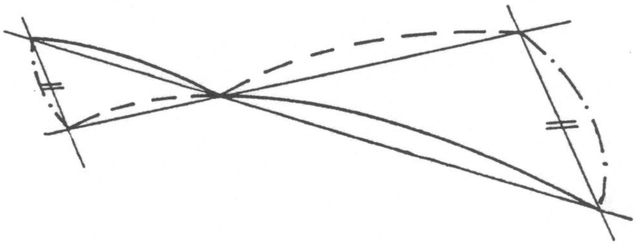
<u>1.5 Satz (2.Strahlen- oder Vierstrecksatz):</u> Zwei Geraden g und h schneiden sich in A. Beide Geraden werden von den verschiedenen Parallelen p und q so geschnitten, daß auf beiden Parallelen A nicht liegt (siehe die Figur).

Dann gilt:

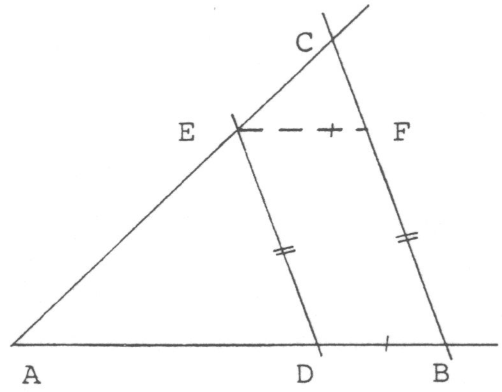
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{CB}} \quad (6)$$



Der Schüler prägt sich den Satz mit der folgenden Figur ein:



Nach oben kann man sich auf die nebenstehende Figur beim Beweis beschränken; führt man EF als Hilfslinie ein, so gilt nach einer Umnummerierung nach (4):



$$\frac{\overline{EC}}{\overline{AE}} + 1 = \frac{\overline{CF}}{\overline{BF}} + 1 \quad \text{oder}$$

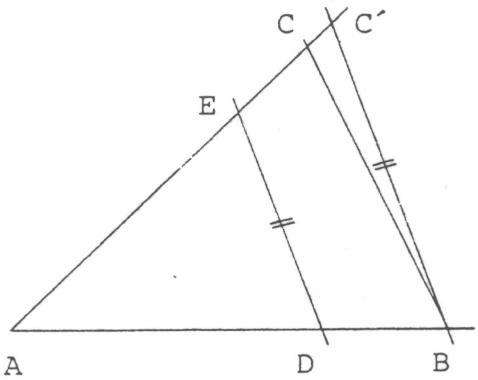
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} .$$

Passendes Aufgabenmaterial findet man in jedem Lehrbuch (insbesondere bei SCHRÖDER-UCHTMANN [6] Seite 24ff).

Man setzt $\frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} =: k$

und fragt die Schüler nach der Gesamtsituation der oben gezeichneten Figur. Meist erhält man die Antwort: "Das Dreieck ABC ist um den Faktor k verkleinert worden". Bevor man dieses Ergebnis weiter verwertet (siehe §2), wendet man sich den Umkehrungen der Strahlensätze zu:

Gilt in der nebenstehenden Figur (4) oder (5) und ist $DE \nparallel BC$, so gibt es durch B eine Parallele BC´ zu DE und nach 1.4 findet man:



$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC'}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} ,$$

letzteres wegen der Voraussetzung (4).
Hieraus folgt $\overline{EC'} = \overline{EC}$ oder $C' = C$.
D.h. es gilt:

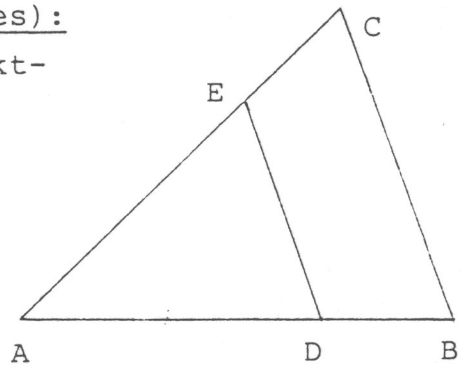
<u>1.6 Satz (Umkehrung des Strahlensatzes):</u>

Gegeben ist die gezeichnete Punkt-Geraden-Konfiguration mit

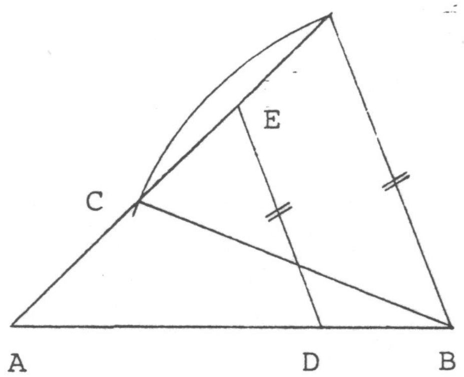
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} .$$

Dann gilt: $DE \parallel BC$.



Man beachte: Die Umkehrung von 1.5 ist falsch, wie das folgende Bild zeigt:



Es gilt $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BC}}$

aber $ED \nparallel BC$.

Es folgen Übungsaufgaben (siehe insbesondere SCHRÖDER-UCHTMANN [6] Seite 28-29 speziell Aufgabe Nr.3).

§2 Abbildungsgeometrie 1.Teil

Schon anschließend an 1.5 wurde festgestellt, daß der Strahlensatz das Vergrößern und dann auch Verkleinern von Dreiecken beschreibt. Es handelt sich also um ein Verändern von Figuren in der Ebene, also um eine Abbildung der Ebene in sich. Weil dem Schüler aus der Geographie, aber auch von der Tätigkeit des Ingenieurs (z.B.Architekten) bekannt ist, daß es sich hierbei um einen wichtigen Vorgang handelt, wird dieser genauer beschrieben.

Den Figuren zu 1.4 und 1.5 entnimmt man, daß die genannte Abbildung einen Fixpunkt A hat, wenn man nicht anschließend auf die Ebene eine Bewegung wirken läßt. D.h. beim Vergößern oder Verkleinern laufen E und D jeweils auf ihren Geraden durch den Fixpunkt.

Diesen Ablauf macht man der ganzen Ebene zugänglich (Oft ist es schon hier zweckmäßig, ein Gummituch zu erwähnen, das bei A festgehalten wird und insgesamt gedehnt wird. Bezeichnet man mit $\mathbb{P}$ die Punktmenge der Ebene, so definiert man jetzt:

<u>2.1 Definition:</u> Die Abbildung $S(Z,k): \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ heißt zentrische Streckung (Dilatation) mit Zentrum Z und Abbildungsfaktor k, $S(Z,k): P \longmapsto P'$, wenn gilt:

$P = Z \longmapsto Z = P'$

$Z \neq P \longmapsto P' \in ZP$ mit $\dfrac{\overline{ZP'}}{\overline{ZP}} = k.$

Ist $|k| > 1$, so heißt $S(Z,k)$ Vergrößerung, ist $|k| < 1$, so heißt $S(Z,k)$ Verkleinerung. Für $k = 1$ gilt $S(Z,k) = id$, der identischen Abbildung. Ist $k > 0$, so sollen P und P' auf derselben Halbgeraden durch Z liegen, ist $k < 0$, so trennt Z die Punkte P und P' auf der Geraden ZP.

Der "Zusatz" zu 2.1 kann im Unterricht natürlich erst nach einigen einschlägigen Beispielen so formuliert werden. Ob k rational oder irrational ist, spielt keine Rolle, wie bei ARTIN [1] Seite 58 und folgenden bei einer metrikfreien Definition der Dilatationen gezeigt wird; denn die Existenz irrationaler k hängt nur von weiteren hier nicht näher zu beschreibenden Eigenschaften von $\mathbb{P}$ ab.

<u>2.2 Satz:</u> Durch Vorgabe des Zentrums Z und eines Punktes $P \neq Z$ mit dessen Bildpunkt P' oder
durch Vorgabe des Zentrums Z und des Abbildungsfaktors $k = \dfrac{\overline{ZP'}}{\overline{ZP}}$
ist $S(Z,k)$ eindeutig bestimmt.

Die Beweisidee ist dem Schüler erkennbar; denn nach 1.6 muß der Bildpunkt Q' eines jeden weiteren Punktes Q auf der Parallelen zu PQ durch Q liegen.

<u>2.3 Satz:</u> Ist g eine Gerade, so ist $g' := S(Z,k)g$ eine zu g Parallele.

Abgesehen vom trivialen Fall $g \ni Z$, gilt 2.3 wegen 1.6 und weil es durch jeden Punkt Q' genau eine Parallele zu PQ gibt.

Wegen 2.3 und 1.5 gilt:

<u>2.4 Satz:</u> Ist m eine Strecke, so ist $m' := S(Z,k)m$ eine zu m parallele Strecke der k -fachen Länge.

Wegen der Winkelsätze für parallele Geraden und 2.3 folgt:

<u>2.5 Satz:</u> Zentrische Streckungen sind winkeltreu.

Hat man 1.6 zur Verfügung, so sind die meisten Beweise über zentrische Streckungen einfach. Sie können sogar als Hausaufgabe gestellt werden, da durch §1 ein Grundkonzept erarbeitet wurde, mit dem der Schüler jetzt selbständig arbeiten kann.

Es folgen die sogenannten Fundamentalkonstruktionen:

<u>2.6 Satz (Fundamentalkonstruktion):</u> Ist $\overline{AB}$ und das hierzu parallele nicht gleich lange Bild $\overline{A'B'}$ einer zentrischen Streckung $S(Z,k)$ nach Lage und Länge gegeben, so ist $k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ und Z eindeutig konstruierbar.

Beweis:

1.Fall: $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ liegen auf verschiedenen Geraden:
Dann ist $Z = AA' \cap BB'$.

2.Fall: $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ liegen auf derselben Geraden. Dann kann man stets durch A und A´ zwei parallele Geraden zeichnen und auf diesen die Strecke $\overline{AB}$ ab A und die Strecke $\overline{A'B'}$ ab A´abtragen und erhält die Situation des 1.Falls. <u>Vorsicht!</u> Ist die Punktreihenfolge von $\overline{AB}$ gegenüber der von $\overline{A'B'}$ auf der Geraden umgekehrt, muß man auf verschiedenen Seiten der Trägergeraden die Strecken abtragen, weil dann $k < 0$ ist.

Wer Lust zur Diskussion mit Schülern hat, kann 2.6 als Hausaufgabe stellen. Nur selten kommen dann Schüler selbst darauf, zuerst den allgemeinen "1.Fall" und dann den speziellen "2.Fall" anzupacken. Geht man umgekehrt vor, so wird die Fallunterscheidung wesentlich länger, was bei der Besprechung der Hausaufgabe große Diskussionen hervorrufen kann.

<u>Selbstverständlich</u> kann man nun auch nur die Streckenlängen $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ vorgeben, also letztlich $k \neq 1$ und erhält dann bei weiterer Vorgabe von z.B. einem Punkt P mit seinem Bild P´ die sogenannte 1. und 2. Fundamentalkonstruktion aus [4] Seite 24.

Übungsaufgaben findet man in der üblichen Schulbuchliteratur.

§3 Der Vektorraum.

Man wiederholt aus der 8.Jahrgangsstufe:

3.1 Definition: Eine Verschiebung ist durch Vorgabe eines Paares (Punkt P, Bildpunkt P´) gegeben. Jeder weitere Punkt $Q \in \mathbb{P}$ wird auf Q´ abgebildet mit $QQ' \parallel PP'$ und $QP \parallel Q'P'$ (vergl. ARTIN [1] Seite 54 und folgende). Ist $Q \in PP'$ so betrachtet man zunächst erst einen Hilfspunkt $R \notin PP'$.
Verschiebungen heißen auch Vektoren, insbesondere, wenn man das Nacheinanderausüben von Verschiebungen untersucht, was dann mit + gekennzeichnet wird.

Beobachtet man die Wirkungsweise einer Verschiebung auf die Punkte einer Ebene, so erkennt man:

3.2 Definition: Ein Vektor ist eine Klasse (= Menge) aus gleich langen, gleich gerichteten Pfeilen.

3.3 Satz: Die Menge der Vektoren bildet mit + als Verknüpfung eine Struktur (V,+), die eine ABELsche Gruppe ist.

Man läßt auf einen Vektor eine zentrische Streckung wirken und findet:

3.4 Satz: Die zentrische Streckung S(Z,k) bildet einen Vektor $\mathfrak{a}$ wieder als Vektor $\mathfrak{a}'$ ab, wobei $\mathfrak{a}'$ gleiche Richtung wie $\mathfrak{a}$ und k-fache Länge von $\mathfrak{a}$ hat. $\mathfrak{a}'$ ist unabhängig von der Wahl von Z.

Der Satz wird in mehreren Schritten bewiesen, unter Umständen der letzte Teil als Hausaufgabe.

3.5 Definition: Unter dem k-fachen eines Vektors $\mathfrak{a}$ versteht man $\mathfrak{a}' =: k \cdot \mathfrak{a}$, das Bild von $\mathfrak{a}$ unter einer zentrischen Streckung S(Z,k) mit beliebigem Zentrum Z.

Mit Hilfe von zentrischen Streckungen beweist man z.T. als Hausaufgabe die folgenden Eigenschaften:

$$1 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$
$$m \cdot (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = m \cdot \mathfrak{a}_1 + m \cdot \mathfrak{a}_2$$
$$(m + n) \cdot \mathfrak{a} = m \cdot \mathfrak{a} + n \cdot \mathfrak{a}$$
$$m \cdot (n \cdot \mathfrak{a}) = (mn) \cdot \mathfrak{a}$$
$$(-m) \cdot \mathfrak{a} = -(m \cdot \mathfrak{a}) \qquad (7)$$
$$0 \cdot \mathfrak{a} = 0 \qquad (8)$$

Schließlich trifft man die folgende Definition:

3.6 Definition: Eine Menge V heißt Vektorraum über einem Körper K, wenn Abbildungen $+: V \times V \longrightarrow V$ und $\cdot: K \times V \longrightarrow V$ mit den folgenden Eigenschaften erklärt sind:

(V,+) ist eine ABELsche Gruppe (Gesetze 1. bis 4.).

5. Für alle k,l aus K und alle $\mathfrak{a}$ aus V gilt $k\cdot(l\cdot \mathfrak{a}) = (kl)\cdot \mathfrak{a}$.
6. Für alle k aus K und alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ aus V gilt $k\cdot(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = k\cdot\mathfrak{a} + k\cdot\mathfrak{b}$.
7. Für alle k,l aus K und alle $\mathfrak{a}$ aus V gilt $(k+l)\cdot\mathfrak{a} = k\cdot\mathfrak{a} + l\cdot\mathfrak{a}$.
8. Für alle $\mathfrak{a}$ aus V und 1 aus K gilt: $1\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.
9. Für alle k aus K und alle $\mathfrak{a}$ aus V gilt $k\cdot\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\cdot k$.

Zweckmäßigerweise zeigt man, wie (7) und (8) aus 3.6 deduziert werden und kommt auf die Unterschiede zwischen den Gesetzen in einem Vektorraum und denen in einem Körper zu sprechen.

Übliche Aufgaben folgen. Der weitere Verlauf entspricht der im CULP [2] ausgedruckten Reihenfolge.

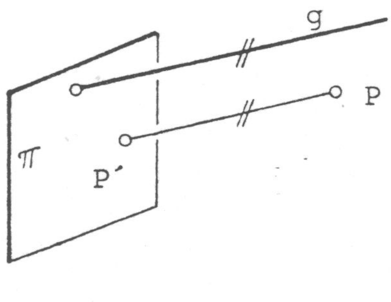
§4 Abbildungsgeometrie 2.Teil.

Am Ende der 9.Jahrgangsstufe werden erstmals Schrägbilder gezeichnet. Man kommt damit auf das Wesen der Parallelprojektion zu sprechen. Wenn hierüber gerade im Hinblick auf das Additum Darstellende Geometrie der 10.Jahrgangsstufe eine eigene Abhandlung zu schreiben ist, soll doch hier bereits erwähnt werden, wieweit ein räumlicher Strahlensatz eine Rolle spielt.

Man beachte: *"Parallel" heißt im Folgenden auch "gleich".*

4.1 Definition: P_3 sei die Punktmenge des Anschauungsraumes, P_2 die Punktmenge einer Ebene , genannt Bildtafel oder Rißtafel. Eine Abbildung $\mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ heißt Parallelprojektion $P(\pi, g)$ auf π, wenn $g \nparallel \pi$ und $P \longmapsto P' = \pi \cap p$, wobei p eine zu g Parallele durch P ist.

In den Schülerheften steht zu 4.1 nur:



Die Parallelprojektion ist eine Punktabbildung (sogenannte *Punkttreue*).

Man untersucht die Eigenschaften der Parallelprojektion:

4.2 Satz: Das parallelprojektive Bild einer Geraden h ist eine Gerade h´ oder ein Punkt h´(falls h $\parallel$ g) (sogenannte *Geradentreue*).
Parallele Geraden h_i werden auf parallele Geraden h_i' oder auf kollineare Punkte h_i' (falls $h_i \parallel g$) abgebildet(sogenannte *Parallelentreue*).
Das Bild einer Ebene ε ist ganz π oder eine Gerade ε' (falls $\varepsilon \parallel g$).
Das Bild von parallelen Ebenen ε_i ist ganz π oder parallele Geraden ε_i' (falls $\varepsilon_i \parallel g$).
Die Parallelprojektion ist *inzidenztreu*, d.h. wenn $P \in M \subsetneq \mathbb{P}$, dann ist $P' \in M'$.

Der Beweis wird anschaulich durch Zeichnungen geführt; es werden hierbei nur die Inzidenzeigenschaften von $\mathbb{P}_3$ ausgenutzt. Dann wird man feststellen:

4.3 Satz: Das Bild m´ einer Strecke m hat dieselbe Länge wie m, wenn m $\parallel$ π (Bildtafel) ist.

In diesem Fall bilden die Projektionsstrahlen durch die Enden der Strecke mit m und m´ ein Parallelogramm. I.a. aber ist die Streckenlänge von m bei Parallelprojektion mit einem Faktor k verzerrt. Die Umkehrung von 4.3 ist falsch.

4.4 Satz (räumlicher Vierstreckensatz): Bei Parallelprojektion werden parallele Strecken im selben Verhältnis verzerrt.

Beweis:
Wegen 4.3 kann man sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf Strecken $m_i \nparallel \pi$ beschränken.

1.Fall: Liegen m_1 und m_2 mit ihren Bildern in einer Ebene, so liegt der Fall des ebenen Vierstreckensatzes vor, wie er in §1 untersucht wurde.

2.Fall: m_1, m_1' und m_2, m_2' liegen in verschiedenen Projektionsebenen ε_1 und ε_2; dann muß wegen $m_1 \parallel m_2$ auch $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ gelten. Eine Parallelverschiebung von ε_1 nach ε_2 ändert nichts an den metrischen Verhältnissen in ε_1. Man erhält so aber wieder die Konfiguration des 1.Falles.

Damit hat man die Grundlagen für das Schrägbild geschaffen: Aus den zu π parallelen Strecken, die unverkürzt abgebildet werden, und einer weiteren Parallelenschar mit ihrem Verzerrungsmaßstab kann jetzt jede Ebene abgebildet werden. Analog braucht man bei Abbildung eines räumlichen Gegenstandes zwei weitere Parallelenscharen mit ihren Verzerrungsmaßstäben. Sinnvoller Weise gibt man das Bild eines Koordinatensystems(O;x,y,z) in π als $(\bar{O};\bar{x},\bar{y},\bar{z})$an. So werden die Schrägbilder aller ebenflächig begrenzter Körper konstruiert.

Schrägbilder Schülern zeichnen zu lassen, ohne vorher zu erklären, wie es zu solchen Schrägbildern kommt, entspricht nicht dem gymnasialen Unterrichtungsstil.

§5 Abschließende Gedanken.

5.1 Bei der skizzierten Methode handelt es sich um eine Alternative zur unverbindlichen Reihenfolge im CULP [2], die bereits mehrfach für September bis Dezember in der 9.Jahrgangsstufe praktiziert wurde unter Verwendung des Aufgabenmaterials der eingeführten Schullehrbücher. Die Alternative ist lehrplankonform.

5.2 Relativ früh erhält der Schüler mit dem Vierstreckensatz ein Rüstzeug, mit dem er selbständig Lösungsstrategien finden kann.

5.3 Der Grundgedanke der Methode ist nicht neu (vergl. SCHRÖDER-UCHTMANN [6]) und steht - wie gezeigt wurde - durchaus nicht im Widerspruch zur sogenannten Abbildungsgeometrie, auf die, aus bekannten Gründen, auch hier nicht verzichtet werden kann; doch meine ich, man sollte so ehrlich sein, zuzugeben, daß die Reinrassigkeit einer Methode, wie die der Abbildungsgeometrie in [4], den Zeitaufwand hierzu nicht rechtfertigt.

5.4 Durch den Zeitgewinn findet man Gelegenheit, in den Unterricht Anwendungsaufgaben (z.B.MEYER [5] Seite 121 und folgende) und propädeutische Darstellende Geometrie auch in der 9.Jahrgangsstufe einzubauen, was Schülern nachweisbar Freude bereitet.

Literatur:

[1] ARTIN, E.: Geometric Algebra, Interscience Publishers, Inc., New York 1957

[2] CULP: Curricularer Lehrplan Mathematik für die Jahrgangsstufe 9 des Gymnasiums, Amtsblatt des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus, Teil I, Sondernummer 9, 28.4.1978

[3] EUKLID : Die Elemente von EUKLID, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1933 -1937.

[4] KRATZ-WÖRLE: Geometrie 2, Bayerischer Schulbuchverlag München 1978.

[5] MEYER, KH.:Algebra und Geometrie, Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht Band 1, Hirschgraben Frankfurt 1980

[6] SCHRÖDER-UCHTMANN: Einführung in die Mathematik, Geometrie 2, Diesterweg Frankfurt 1974

Anschrift des Autors:
Dr. Karlhorst Meyer, Kyffhäuserstraße 20, 8014 Neubiberg
Gymnasium Starnberg