M A T H E M A T I K I N F O R M A T I O N
GYMNASIUM STARNBERG
FACHBEREICH MATHEMATIK
NR. 2A
9. 2. 1981

Dr. Karlhorst Meyer

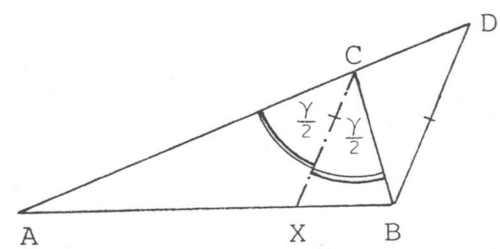
Zum Kreis des APOLLONIUS.

Nach einer langen Pause gehört der Kreis des APOLLONIUS (262-190 v.Chr.) wieder zu den Lerninhalten der 9.Klasse des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasiums (vergl. CULP [1] Seite 287). Da die meisten an den Schulen verwendeten Lehrbücher nichts über dieses interessante Kapitel der ebenen Geometrie schreiben, wird im Folgenden auseinandergesetzt, wie man den Satz des APOLLONIUS lehren kann, und einige Übungsbeispiele aus ZWERGER-KLUG [2] angegeben.

§1 Vorbereitung:

Zeichnet man zur Winkelhalbierenden CX im Dreieck ABC die Parallele BD (siehe die Figur), so erhält man eine Strahlensatzfigur und es gilt:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} .$$



Nachdem ursprünglich das Dreieck ABC gegeben war, ist naheliegend zu versuchen, ob man über $\overline{CD}$ mit Hilfe der drei Dreiecksseiten zu einer Aussage kommen kann. In einem ersten Schritt versucht man gleich große Dinge an der Figur ausfindig zu machen und findet Winkel an parallelen Geraden:

$$\sphericalangle\ CBD = \frac{\gamma}{2} \quad \text{(Wechsel- oder Z-Winkel);}$$

$$\sphericalangle\ CDB = \frac{\gamma}{2} \quad \text{(Stufen- oder F-Winkel);}$$

d.h. $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CDB$, also ist das Dreieck CBD gleichschenkelig, also

$$\overline{CD} = \overline{CB}.$$

Damit hat man gefunden:

1.1 Satz: Die Winkelhalbierende durch eine Dreiecksecke teilt die der Ecke gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Es sollte im Mathematikunterricht zu einer Regel werden, stets nach der Gültigkeit des Umkehrsatzes zu fragen:

1.2 Umkehrung: Teilt eine Ecktransversale eines Dreieckes die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten, so ist sie eine Winkelhalbierende.

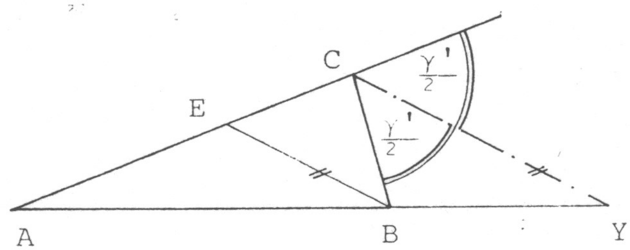
Der Beweis ist trivial; denn nimmt man an, sie wäre es nicht, gäbe es die Winkelhalbierende doch, die nach 1.1 zu einem Teilungspunkt X_1 führen würde. Man hätte dann zu einem Teilungsverhältnis auf einer Strecke zwei verschiedene Teilungspunkte X und X_1, was nicht sein kann.

Die Erfahrung zeigt, daß i. a. dem Schüler die Halbierung der Außenwinkel eines Dreieckes durchaus nicht so geläufig ist; deshalb wiederholt man:

1.3 Satz: Die Winkelhalbierenden eines Winkels und seines Nebenwinkels (Außenwinkel beim Dreieck) stehen aufeinander senkrecht.

Als Hausaufgabe läßt man beweisen:

1.4 Satz: Die Winkelhalbierende eines Außenwinkels eines Dreieckes teilt die gegenüberliegende Dreiecksseite außen im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten.



Als Hilfestellung zur Hausaufgabe wird man den Satzinhalt an einer Skizze erläutern.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden:

1.5 Satz: Die Winkelhalbierenden eines Dreieckswinkels und seines Außenwinkels teilen die Gegenseite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten.
Sind a, b, c die Seiten eines Dreieckes, so erhält man durch harmonische Teilung von c im Verhältnis a:b Teilungspunkte, die zu den Winkelhalbierenden des c gegenüberliegenden Winkels und dessen Außenwinkels führen.

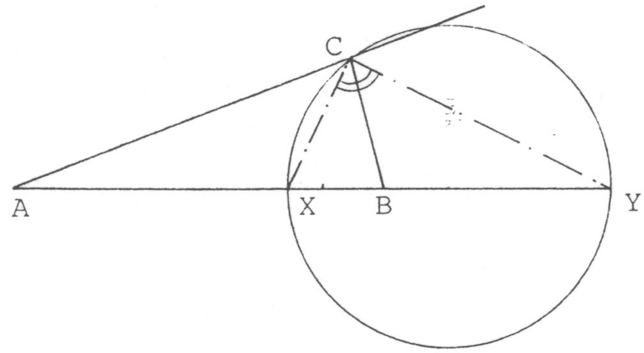
§2 Kreis des APOLLONIUS:

Man kann die in §1 behandelte Fragestellung noch in anderer Weise umkehren:
Da man gesehen hat, daß die Winkelhalbierenden eines Dreieckswinkels und seines Außenwinkels die gegenüberliegende Dreiecksseite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Seiten teilen, kann man jetzt die Frage stellen:

Hat man eine Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis τ harmonisch geteilt, wo liegen dann alle Dreiecksspitzen C mit $\overline{CA}:\overline{CB} = \tau$?

Oder: Wie bestimmt man alle Punkte C, deren Entfernung von zwei gegebenen Punkten A und B ein bestimmtes Verhältnis m:n = τ haben?

Um den gesuchten "geometrischen Ort" leichter finden zu können, empfiehlt sich, die Schüler noch einmal das Gesamtergebnis von §1 zeichnen zu lassen für ein bestimmtes Dreieck (Nicht nur eine Folie an die Wand projizieren!).

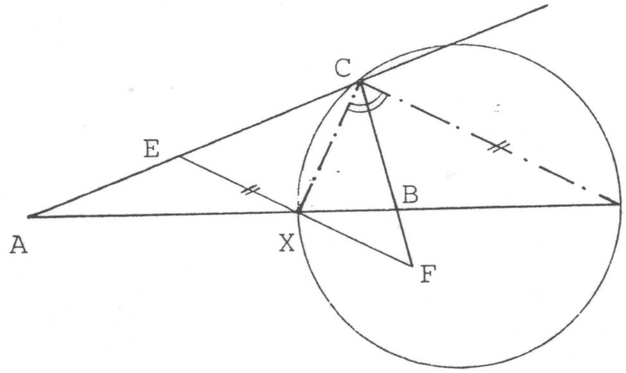


Nach 1.3 ist $\measuredangle XCY = 90^{\circ}$. D.h. aber, daß alle gesuchten C so liegen müssen, daß unabhängig von der Wahl von C dieser Winkel erhalten bleibt. Man legt auf den Winkel ein Zeichendreieck und versucht, experimentell weitere Punkte C zu finden bei festem X und Y bzw A und B. Die Schüler finden von selbst meist den THALES-Kreis, der die Lösung bringt.
Ein anderer Weg benutzt den Taschenrechner: Bei vorgegebenen Punkten A,B,X,Y läßt man das Teilungsverhältnis ausrechnen und für gegebenes $\overline{AC'}$ das dazugehörige $\overline{BC'}$ ausrechnen. Die Schüler konstruieren so einige Punkte C', bis sie selbst den THALES-Kreis finden.

Hausaufgabe: Konstruiere mit Zirkel und Lineal alle Punkte C, die von $\overline{AB} = 5$ cm das Abstandsverhältnis $\overline{CA} : \overline{CB} = 5 : 3$ haben.

2.1 Satz (Kreis des APOLLONIUS): Die Menge aller Punkte, die von zwei gegebenen Punkten A, B ein festes Abstandsverhältnis τ haben, ist ein Kreis; die beiden Punkte, die $\overline{AB}$ innen und außen im Verhältnis τ teilen, bestimmen den Kreisdurchmesser.

Mit Sorgfalt wird nun darauf hingewiesen, daß mit obiger Aufgabe noch kein Beweis für 2.1 erbracht wurde. Es ist nämlich noch zu zeigen, daß XC und YC für alle C des Kreises Winkelhalbierende sind.



Zu diesem Zweck zeichnen wir durch X eine Parallele zu CY, die die beiden "anderen" Dreiecksseiten in F und E schneidet.

Nach dem Vierstreckensatz gilt dann:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AY}} = \frac{\overline{EX}}{\overline{CY}} \quad \text{und}$$

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{BY}} = \frac{\overline{FX}}{\overline{CY}} .$$

Wegen der harmonischen Teilung von $\overline{XY}$ folgt hieraus $\overline{EX} = \overline{FX}$.

Da nach Voraussetzung DE $\perp$ XC ist, folgt: XC ist im Dreieck DCE und damit im Dreieck ABC bei C Winkelhalbierende; wegen des rechten Winkels bei C ist dann CY äußere Winkelhalbierende und nach 1.5 gilt:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} .$$

Damit ist 2.1 bewiesen.

Der Kreis des APOLLONIUS findet bei Konstruktionsaufgaben Verwendung, wenn von zwei Strecken nur ihr Verhältnis bekannt ist, nicht aber ihre Längen gegeben sind.

§3 Aufgabenstellungen:

3.1 Die Winkelhalbierende eines Dreieckes teilt die Gegenseite in zwei Abschnitte von 6,5 cm und 10,4 cm Länge. Wie groß sind die beiden anderen Dreiecksseiten, wenn ihre Summe 26 cm beträgt?

3.2 Die Summe der drei Seiten eines Dreieckes ABC ist 25 cm; die Winkelhalbierende des Winkels γ teilt die Gegenseite c in zwei Abschnitte von 5,1 cm und 3,4 cm. Wie groß sind die Seiten a, b, c?

3.3 Gegeben sind ein Winkel α und ein Punkt P innerhalb des Winkelfeldes von α.
1. Zeichne durch P eine Gerade so, daß die von ihr auf den Schenkeln abgeschnittenen Strecken sich wie m:n=5:2 verhalten!
2. Zeichne durch P eine Gerade so, daß das zwischen den Schenkeln liegende Stück der Geraden durch P im Verhältnis 5:2 geteilt wird (Lösung ist ohne 2.1 möglich!).

3.4 Konstruiere ein Dreieck aus c = 8 cm, a:b = 3:7 und der Höhe h_c=3cm.

3.5 Konstruiere ein Dreieck aus c = 4,8 cm, a:b = 5:3 und $\alpha = 30^\circ$.

3.6 Konstruiere ein Dreieck aus c = 10 cm, a:b = 1:3 und $\gamma = 90^\circ$ und ein zweites Dreieck mit $\gamma = 60^\circ$.

3.7 Konstruiere ein Dreieck aus c = 13 cm, a:b = 4:9 und der Winkelhalbierenden w_γ = 10 cm Länge.

3.8 Konstruiere ein Dreieck aus c, a:b = m:n und der Länge der Seitenhalbierenden s_c.

3.9 Konstruiere ein Dreieck aus den Längen der Seitenhalbierenden s_a und der Höhe h_c und dem Winkel α.

3.10 Die Winkelhalbierende w_γ teilt die Seite c eines Dreieckes ABC in die Abschnitte u und v. Konstruiere das Dreieck ABC aus u = 27 mm, v = 72 mm und $\gamma = 60^\circ$.

Zum Kontrast hierzu einige weitere Übungsaufgaben:

3.11 In einem Dreieck verhalten sich die drei Seitenhalbierenden $s_a:s_b:s_c$ wie 6:5:7,5; der durch den Schwerpunkt geteilte größere Abschnitt von s_a ist 6,4 cm. Wie lang sind die Seitenhalbierenden?

3.12 Wie lang sind die Katheten eines rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Hypotenuse durch die Halbierende des rechten Winkels in zwei Abschnitte von 12 cm und 9 cm zerlegt wird?

3.13 Gegeben sind:
1. zwei sich schneidende Geraden g_1 und g_2;
2. zwei parallele Geraden.

Zeichne den geometrischen Ort der Punkte, deren Abstände von den gegebenen Geraden sich wie m:n = 4:3 verhalten!

3.14 Bestimme einen Punkt, dessen Abstände von den drei Seiten eines Dreieckes sich wie u:v:w verhalten!

Literatur:

CULP [1] : Amtsblatt des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus, Teil I, Sondernummer 9, 28.4.1978: Curricularer Lehrplan Mathematik für die Jahrgangsstufe 9 des Gymnasiums.

ZWERGER-KLUG [2]: Planimetrie, Lindauers Mathematisches Unterrichtswerk München 1960.

Anschrift des Autors:

Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
8014 Neubiberg