MATHEMATIKINFORMATION

GYMNASIUM STARNBERG
FACHBEREICH MATHEMATIK

Preprint aus Nr.25 vom 1.März 1993

Dr. Karlhorst Meyer

Besondere Punkte im Dreieck

1. Was versteht man unter besonderen Punkten?

Manche, z.B. BAPTIST [1], sprechen auch von merkwürdigen Punkten, die vor allem die Mathematiker des 19. Jahrhunderts beschäftigten, aber auch heute noch eine gewisse Rolle spielen, und dies nicht nur in der Rückbesinnung des Gymnasiums auf sie bzw. im Bundeswettbewerb Mathematik. So hat z.B. 1957 der ungarische Algebraiker REDEI vier Wochen lang im mathematischen Kolloquium der Universität Hamburg versucht, axiomatisch festzulegen, was diese besonderen Punkte auszeichnet. Leider waren seine Bemühungen vergeblich, weil er am Ende den Satz fand:
Jede Gerade, die zwei merkwürdige Punkte trägt, enthält unendlich viele.
Da er aber zwei solche Geraden gefunden hatte, war jeder Punkt seiner Ebene merkwürdig, was sicher keine besonders gute Charakterisierung solcher Punkte bedeutete.

Untersuchungen die darüber hinausgehen, scheint es bis jetzt nicht zu geben. Die Beschreibung der Merkwürdigkeit bei BAPTIST [1] ist hier schon mehr philosophischer Art, wenn er in Anlehnung an BERKHAN/MEYER [1] in der Besonderheit der Punkte vor allem den Umstand sieht, daß sie als Schnitt zweier Geraden bestimmt sind, aber eine dritte durch sie geht. Das ist sicher in der nicht minimalen affinen Ebene kein hervorragender Umstand. Bei BAPTIST scheint es in erster Linie um die Konsequenzen des Satzes von CEVA (vgl. 4.) zu gehen.

Die neue Lehrbuchreihe "Brennpunkt Mathematik" (vgl. MEYER [1]) bemüht sich, die Besonderheiten der sog. merkwürdigen Punkte herauszustellen. So findet man z.B. in "Brennpunkt Geometrie 8", Kapitel 7 ein einheitliches Vorgehen beim Behandeln solcher Punkte im Unterricht. Vor allem der Teil 7.3 und

7.4 kann zukünftig nach Lehrplan auf etwas niedrigerem Niveau schon in Jahrgangsstufe 7 gelehrt werden.

2. Propädeutik in Jahrgangsstufe 7

Der Mathematikunterricht versteht unter den merkwürdigen Punkten den Schnittpunkt der drei Höhen, bzw. Winkelhalbierenden, bzw. Seitenhalbierenden oder Schwerlinien, bzw. Mittelsenkrechten im Dreieck.

Für einen einheitlichen Zugang ist es sinnvoll, sich die folgenden Fragen zu überlegen, die sich an "Brennpunkt Geometrie 7" orientieren. Dem Schüler werden Definitionen gegeben, die es ihm ermöglichen, besondere Linien im Dreieck zu zeichnen oder auch zu konstruieren und Vermutungen über die besonderen Punkte zu äußern.

Erste Fragen:

1. Welche Symmetrien helfen bei der Definition der besonderen Dreieckslinien im Sinne von Abständen? Welche konstruktiven Fertigkeiten muß der Schüler hierzu vorher erlernen?

2. An welchen Dreiecken läßt man sinnvollerweise die jeweils gleich gearteten Dreieckstransversalen zeichnen?

3. Wie schärft man die Anschauung der Schüler, um eine passende Vermutung über einen besonderen Punkt zu finden und ein Beweisbedürfnis in diesem Zusammenhang zu wecken?

4. Darf man auf dem Niveau von Frage 3 bereits von Um-, In- oder Ankreisen sprechen?

5. Wie weit darf man in Jahrgangsstufe 7 hierbei Beweisideen schriftlich fixieren? Wie weit ist das Verstehen solcher Zusammenhänge von einem Beweis entfernt?

6. Welche Rolle spielen bei Frage 5 die Axiomgruppen, wie man sie z.B. bei HILBERT [1] findet?

7. Welche Anwendungen für die besonderen Linien bzw. merkwürdigen Punkte sollte man erwähnen?

8. Welche Grundideen machen die besonderen Linien in Jahrgangsstufe 7 zum Projekt?

Die Antworten:

Zu 1.
Der Schüler sollte die Mittelsenkrechte zu zwei Punkten und die Symmetrielinien zu zwei sich schneidenden Geraden kennen. Dann sind die folgenden Fragen verständlich: Wo ist derjenige Punkt, der zu drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkten

den gleichen Abstand hat? Wo ist der Punkt, der zu drei Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen, den gleichen Abstand hat? Man findet, einschließlich Beweis, den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden im Dreieck.

Bei dem Seitenhalbierendenschnittpunkt hat man es da schon schwerer. Man kann in einer gewissen Analogie auch hier zu einer Symmetriebetrachtung kommen, wenn man die Seitenhalbierenden als Schwerlinien im physikalischen Sinn interpretiert. Hierzu erklärt man eine Parallelenschar zu einer Dreiecksseite, deren Geraden jeweils die beiden anderen Dreiecksseiten in zwei Punkten treffen, die zum Schnittpunkt mit der Seitenhalbierenden symmetrisch liegen. Zu einem Beweis der Eindeutigkeit und Existenz des Schwerpunkts führt dies nicht. Bekanntermaßen beweist man den Sachverhalt mit dem Vierstreckensatz der Jahrgangsstufe 9.

Den *Höhenschnittpunktssatz* kann man hier zunächst nicht einbauen. Er ergibt sich als Schnittpunkt von Mittelsenkrechten, wenn man das gegebene Dreieck geeignet vervierfacht.

Um diesen Weg gehen zu können, sind beim Schüler *Fertigkeiten* erforderlich, die er vorher bereits erhalten haben sollte. Im wesentlichen sind dies einfache Konstruktionen, die sich aus dem Spiegeln einfacher Figuren ergeben: Konstruktion der Mittelsenkrechten zweier Punkte, Konstruktion von Winkelhalbierenden und das Konstruieren rechter Winkel. Gerade bei letzterem ist zwar das Konstruieren unter alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal interessant, doch sollte man dem Schüler auch zeigen, daß gerade diese Konstruktion in der Regel sehr ungenau ist. Es lohnt sich also, den Umgang mit dem Geodreieck bzw. mit den Zeichendreiecken zu lehren.
Der Schüler sollte auch frühzeitig Erfahrungen mit sogenannten "schleifenden Schnitten" bekommen; d.h., man kann nur sehr schwer durch den Schnitt zweier Geraden, die sich unter einem sehr kleinen Winkel schneiden, eine dritte Gerade legen.

Das bisherige kann man mathematisch zu der folgenden Äußerung zusammenfassen: Symmetrien und Abstände sind allein nicht in der Lage, die Besonderheit solcher Punkte zu definieren.

Zu 2.
Die "Zeitnot" im Unterricht wird wohl nicht gestatten, jedem Schüler an mehreren Dreiecken die besonderen Punkte konstruieren zu lassen. Da jedoch das *Experimentieren* im Geometrieunterricht wichtig zu sein scheint, kann hier helfen, wenn man in verschiedenen Gruppen die unterschiedlichen Dreiecksformen spitzwinklig, rechtwinklig und stumpfwinklig untersucht. Man sollte allerdings nicht vergessen, daß der Anfänger in der Geometrie nicht wissen kann, daß hier drei wesentliche Dreiecksklassen vorliegen. So wäre es also günstig, wenn die Schüler selbst finden könnten, welche Klassen von Dreiecken man hinsichtlich der besonderen Punkte zu prüfen hat. Dabei werden sich dann auch gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke als Sonderfälle ergeben.

Zu 3.
Der Lehrplan der Jahrgangsstufe 7 sieht vor, daß bei den Schülern erst allmählich in nicht trivialen Fällen ein Beweisbedürfnis geweckt werden soll. Sicher ergeben sich bei der oben erwähnten Gruppenarbeit Zeichnungen, die an der Existenz eines merkwürdigen Punktes zweifeln lassen. Doch sollte man daran denken, daß unter Umständen ein solches Musterbeispiel von einem motorisch gestörten Schüler stammen kann, den man nicht gerade damit blamieren sollte. Was aber dann? Man kann ausnutzen, daß das Tafelbild nicht immer so gut ist, daß man die merkwürdigen Punkte ohne Einatz von Tricks erhält. Ein anderer Weg wären extreme Dreiecksformen, die durch ihre schleifenden Schnitte nicht mehr klar erkennen lassen, ob der gesuchte Schnittpunkt existiert. Jedenfalls sollte man nicht um jeden Preis eine Begründung liefern, wenn es der Klasse "anschaulich" klar ist, daß es im vorliegenden Fall stets einen solchen merkwürdigen Punkt gibt. Dies gilt auch dann, wenn im eingeführten Buch ein Beweis steht. Man kann ja jederzeit in der Jahrgangsstufe 8 die u.U. in Jahrgangsstufe 7 nicht bewiesenen Sachverhalte noch begründen, wenn man über das Beweisen spricht.

Zu 4.
Über die mit den besonderen Punkten im Dreieck verbundenen Kreise sollte man zunächst nur dann in Jahrgangsstufe 7 sprechen, wenn die jeweilige Bedeutung des betreffenden Punktes für das Dreieck bekannt ist, was letztlich nur der Fall sein wird, wenn bereits zumindest auf unterstem Niveau eine Begründung für den Punkt existiert.
Andererseits kann das "Nichtpassen" eines Inkreises usw. dazu führen, daß ein Bedürfnis für eine Begründung entsteht. Jedenfalls läßt sich wohl keine allgemein gültige Empfehlung aussprechen, bereits an dieser Stelle auf diese Kreise zu sprechen zu kommen. Wenn man aber auf Um- und Inkreis eingeht, sollte man nicht die Ankreise vergessen; denn deren Mittelpunkte sind genauso wie der Inkreismittelpunkt als jeweils derjenige charakterisiert, der von drei Dreiecksseiten den gleichen Abstand hat.

Zu 5.
Was ein Beweis in der Mathematik ist, läßt sich nicht einfach beschreiben. Die allgemeine Meinung ist heute, daß es hierbei sehr darauf ankommt, welcher Personenkreis miteinander kommuniziert. Einig ist man sich wohl, daß beim mathematischen Begründen jeweils so viel gesagt werden muß, daß der "Zuhörer" versteht, was man sich selbst überlegt hat. Da es in Jahrgangsstufe 7 vor allem darum geht, beim Schüler die Einsicht der Notwendigkeit mathematischer Begründungen zu wecken, ist es eigentlich gleichgültig, ob und wie weit eine Niederschrift im Unterricht entsteht, auch dann oder vor allem dann, wenn man im eingeführten Schulbuch eine solche vorfindet. Vor der Fertigkeit, einen Beweis schreiben zu können, steht sicher der Stellenwert des Lesenkönnens eines solchen. Doch kann man wohl daran denken, einige Notizen als Gedächtnisstütze in den Schülerheften zu fixieren. Vollständige Beweise, ganz gleich was das sein soll, sollte man jedenfalls in dieser Jahrgangsstufe noch nicht anstreben (vgl. auch 6.).

Zu 6.
Ohne hier sehr ausführlich zu werden, wird nur erwähnt, daß man eigentlich in der Geometrie des Gymnasiums keine strengen Beweise hat, da die Gruppe der Anordnungsaxiome (wie man sie etwa bei HILBERT [1] findet) grundsätzlich nicht berücksichtigt wird, gerade aber sie zur Fallunterscheidung der Dreiecksarten spitzwinklig, rechtwinklig und stumpfwinklig führt.

Zu 7.
Es ist schon interessant, daß abgesehen vom Schwerpunkt eines Dreiecks im Sinne der Physik keine Anwendungen der besonderen Punkte im Dreieck bekannt sind. Anders verhält es sich mit Anwendungen der Ecktransversalen, die zu diesen Punkten führen; es werden aufgezählt:
- Mittelsenkrechte einer Strecke, die bei allen symmetrischen Figuren als Achse zu beobachten ist, also etwa die besten Plätze beim Stereohören festlegt.
- Winkelhalbierende, wie sie als Symmetrieachse bei manchen symmetrischen Figuren auftritt oder die Bewegung des Mittelpunkts einer in einer Rille rollenden Kugel festlegt.
- Höhen, z.B. beim Messen einer Dreieckshöhe mit der Schublehre.

Zu 8.
Viele, auch Lehrerinnen und Lehrer, beklagen immer häufiger, daß immer weniger Kenntnisse bei der einzelnen Schülerin und dem einzelnen Schüler zu beobachten sind. Die Ursache solcher Beobachtungen mag zm Teil darin zu suchen sein, daß zu häufig die Darbietung des Unterrichtsstoffs im Hinblick auf die *allgemeine Reizüberflutung* zu singulär geschieht. Hier ist wohl der Ansatzpunkt für eine etwas stärkere Projektarbeit im Unterricht der Zukunft zu suchen. Mehr als bisher muß der Unterricht auch in der Mathematik bemüht sein, zusammenfassende, übergeordnete Inhalte herauszustellen, um z.B. der einzelnen Schülerin und dem einzelnen Schüler durch Zusammenhänge mehr Chancen zu geben, sich anhand der übergeordneten Belange den Einzelfall selbständig zu rekonstruieren. Die anzusteuernden Projekte müssen dabei nicht immer gleich extravagant werden; ganz im Gegenteil geht es auch hierbei um den schulischen Alltag, der vor allem in seiner Ruhe, in seinem normalen Ablauf nicht gestört werden sollte.

Denkt man daran, wie man früher diese merkwürdigen Punkte nebeneinander und ohne Gemeinsames lehrte, so ist es sicher ein Fortschritt, wenn sich moderne Lehrbücher darum bemühen, hinter den Einzelfällen Gemeinsames herauszustellen, auch dann, wenn, wie eingangs erwähnt, aus Grundlagensicht das Wesentliche hierbei noch nicht entdeckt ist.

Im vorliegenden Fall könnte man als Grundideen, die die merkwürdigen Punkte im Dreieck zum Projekt des Unterrichts machen, nennen:
- Symmetrieeigenschaften der Dreieckstransversalen;
- Abstandsverhalten von Punkten und Geraden.

Man sollte dabei nicht vergessen, daß viele Lerninhalte der früher sogenannten geometrischen Örter mitgelehrt werden, auch wenn dies hier nicht eigens erwähnt wird.

Wie die folgenden Kapitel zeigen werden, ist das Projekt damit nicht abgeschlossen, sondern wird weiter ausbaufähig sein.

3. Begründen in Jahrgangsstufe 8

Allein die Begeisterung an der Abbildungsgeometrie, insbesondere an der Erkenntnis von ARTIN [1], daß Dilatationen, also zentrische Streckungen, keine metrischen, sondern affine Abbildungen sind, reichte natürlich nicht aus, durch Spiegelungsgeometrie die "gute alte" euklidische Figurengeometrie zu verdrängen. Vielmehr waren es damals didaktische Überlegungen, die zeigten, daß zwar die Figurengeometrie den Schüler zwingt, aus seiner Anschauung heraus beim Konstruieren und dann auch beim Beweisen etwas "zu sehen", aber eben dann doch im Einzelfall zu beobachten ist, daß der Schüler ohne weitere Hilfestellung dies nicht ausführen kann. Ich vermute, daran hat sich bis heute nichts geändert. Damals aber erhoffte man sich von den Prinzipien der Abbildungsgeometrie viel; leider ist dieses Bemühen der 60iger Jahre zu sehr ins Algebraische abgerutscht, was dann heute zu einer sehr starken Reduktion der Abbildungsgeometrie führte, wenngleich von einer Abschaffung derselben keine Rede sein kann.

Wenn wir in der Handhabung eines wie auch immer orientierten Projektunterrrichts erfolgreich sein wollen, muß es uns gelingen, dem Schüler anschauliche Methoden in die Hand zu geben, die es ihm erlauben, selbständig z.B. bei den Beweisen von merkwürdigen Punkten im Dreieck auf Ideen zu kommen.

Symmetrien haben etwas mit Abständen zu tun:
- Achsensymmetrie mit Abständen von zwei Punkten.
- Drehsymmetrie mit dem Abstand von einem Punkt.

Wenn der Schüler zur Ordnung erzogen wird, sollte er das Ordnen gewohnt sein.
So kommt es zu den folgenden Fragen:

Weitere Fragen:

9. Die Planimetrie baut auf den Bausteinen Punkte, Geraden und Kreise auf. Welche Abstandsfragen ziehen diese Bausteine nach sich? Die Antworten findet man in dem früher benutzten, mathematisch nicht definierten Begriff des geometrischen Orts.

10. Wie findet man die Punkte, die von zwei verschiedenen Bausteinen aus 1. gleichen Abstand haben? Ab welcher Jahrgangsstufe läßt sich erst diese Frage allgemein beantworten?

11. Man finde die Punkte, die zu drei oder mehr verschiedenen Bausteinen aus 1. den gleichen Abstand haben. Weshalb kann man diese Aufgabe so nicht stellen?

12. Gibt es besondere Punkte in Vierecken? In welcher Jahrgangsstufe sind sie einzuordnen?

13. Lassen sich die durchgeführten Überlegungen auf räumliche Geometrie übertragen? Weshalb kann dies nur ein Thema für Arbeitsgemeinschaften und Facharbeiten sein?

Die Antworten:

Zu 9.
Als Beispiel wird die folgende Frage angeführt:
Der Kreis ist der Ort aller Punkte, die zu einem vorgegebenen Punkt, dem Mittelpunkt, einen festen Abstand (Radius) haben; usw., vgl. "Brennpunkt Mathematik 8", MEYER [1].

Zu 10.
Auch hier genügt es, auf "Brennpunkt Mathematik 8" zu verweisen. Man möge aber beachten, daß hierzu auch die Frage nach den Punkten gehört, die von einem gegebenen Punkt und einer gegebenen Geraden den gleichen Abstand haben. Da dies eine Parabel ist, deren Brennpunkt der gegebene Punkt und deren Direktrix die gegebene Gerade ist, kann dies bestenfalls im Additum des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasiums in Jahrgangsstufe 10 behandelt werden.

Zu 11.
Einfach und nach den Vorkenntnissen aus Jahrgangsstufe 7 leicht einsichtig sind die merkwürdigen Punkte im Dreieck, die von den drei Ecken bzw. den drei Seiten gleichen Abstand haben. Man sollte dabei die Konfiguration nicht vergessen, bei der die drei Punkte auf einer Geraden liegen, bzw. die drei Geraden durch einen Punkt gehen. Das ist sicher aber nicht alles. So kommt z.B. der folgende Fall dazu: Gibt es einen oder mehrere Punkte, die von einer Geraden und zwei Punkten gleichen Abstand haben? Als Lösung findet man den Schnitt zweier achsenparalleler Parabeln. Wenn nun schon das "Projekt" unter dem Aspekt der Symmetrie und des Abstandes läuft, müßte man auch auf diese Fälle eingehen. Hierzu kann eine Geometriesoftware weiterhelfen, oder aber nur Experimentieren anhand von Skizzen. Es genügt ja dann, wenn man dem Schüler z.B. im Overhead Lösungen zeigt, bzw. auf eine spätere Jahrgangsstufe verweist. Jedenfalls müssen die inneren Eigenschaften der Parabel hier nicht angesprochen werden.

Zu 12.
Es gibt einen Punkt, der von vier Ecken, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, gleichen Abstand hat, wenn das Viereck einen Umkreis besitzt. Analog gibt es einen Punkt, der von den vier Seiten eines Vierecks gleichen Abstand hat, wenn es sich um ein Tangentenviereck handelt. Es gibt weitere zum Teil pathalogische Fälle. Vom Curriculum her zeigt sich, daß es sich um dieselbe Jahrgangsstufe handelt. Dies sollte uns noch mehr veranlassen, übergeordnete "Projekte" im normalen Alltagsgeschehen des Mathematikunterrichts zu sehen, um dem Schüler Hilfen für eine geeignete "Rückbesinnung" an die Hand zu geben.

Zu 13.
Der Raum ist die Geometrie, in der wir leben, die Planimetrie das Kalkül, mit dem wir diesen Raum mathematisch erfassen.

Eine unmittelbare Konsequenz dieser Erkenntnis ist, daß wir in viel stärkerem Maße als üblich räumliche Fragestellungen in unseren Unterricht einfließen lassen sollten, auch dann, wenn wir uns gerade nicht im Curriculum mit der sogenannten Stereometrie befassen. Dies würde u.a. dazu führen, daß die Vorkenntnisse, die Schüler der Jahrgangsstufe 5 noch haben, nicht verloren gehen. Wie das technisch auszuführen ist, hat in vielfältiger Weise die laufend erwähnte Lehrbuchreihe gezeigt.

Zunächst einmal muß man analog zum Problem 9. die Ebene bei den Grundbausteinen aufnehmen. Dies führt u.a.im Bereich des obigen Problems 10 dazu, daß im Raum die Punkte, die zu zwei gegebenen Punkten gleichen Abstand haben, auf einer sogenannten Mittelebene liegen, an der gespiegelt die beiden Punkte ineinander übergeführt werden. Es würde hier zu weit führen, wenn man einen Katalog aller sich ergebender Fragen aufzählen würde. Die Problemstellung 11 zieht dann die Erweiterung nach sich, daß u.a. untersucht werden muß, ob es zu vier Raumpunkten, die nicht in einer Ebene liegen, und von denen keine drei auf einer Geraden sind, eine Umkugel und damit ein Punkt existiert, von dem aus alle gegebenen vier Punkte gleichen Abstand haben. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf FRITSCH [1]. Gerade aber dieser Artikel macht deutlich, daß die Einzelüberlegung und die erforderliche Zeichenarbeit, die gemacht werden muß, in der Regel für eine Unterrichtsstunde zu lang ist, wenn man an das Arbeitstempo einer Klasse denkt. Es kann aber nicht verschwiegen werden, daß es sich hierbei um eine Fundgrube für Facharbeiten handelt, bei denen unter Umständen neben Theorie auch viel Geschick im Zeichnen (Darstellende Geometrie!) zum Tragen kommt.

4. Ein weiterer Zusammenhang

Man möge sich zunächst einmal mit den folgenden Aufgaben nach BAPTIST [1] befassen:

Weitere Fragen:

14. Man verbinde die Berührpunkte des Inkreises eines Dreiecks mit den jeweils gegenüber liegenden Dreiecksecken. Man erhält den sogenannten GERGONNE-Punkt G (GERGONNE, französischer Mathematiker 1771 - 1859).

15. Verbindet man jeweils den Berührpunkt eines Ankreises, der auf der eigentlichen Dreiecksseite liegt, mit der gegenüber liegenden Dreiecksecke, so erhält man den sogenannten NAGEL-Punkt N im Dreieck (NAGEL, deutscher Theologe und Mathematiker 1803 - 1882).

16. Verbindet man die Berührpunkte eines Ankreises jeweils mit der zu dieser Seite oder ihrer Verlängerung gegenüber liegenden Ecke, so erhält man die sogenannten äußeren GERGONNE-Punkte G_a, G_b und G_c.

17. Verbindet man bei zwei Ankreisen ihre Berührpunkte auf verlängerten Seiten jeweils mit den zu diesen Seiten gegenüberliegenden Ecken, so liegt ihr Schnittpunkt auf einer der Verbindungsgeraden der Inkreisberührpunkte mit der entsprechenden gegenüber liegenden Ecke. Diese Schnittpunkte heißen äußere NAGEL-Punkte N_a, N_b und N_c.

18. Man möge durch Messen von Streckenlängen in den Konfigurationen der Aufgaben 14 bis 17 bzw. beim Ausmessen der Streckenlängen der früher behandelten besonderen Punkte eine Gesetzmäßigkeit finden.

19. Drei Massenpunkte mit verschiedenen Massen werden zu einem Mobile aufgehängt. Hierbei werden zu jeweils zwei Massen mit Hilfe des Hebelgesetzes ein gemeinsamer Schwerpunkt gefunden. Mit Hilfe der Lage dieser Schwerpunkte kann der in Aufgabe 18 gesuchte Satz von CEVA begründet werden.

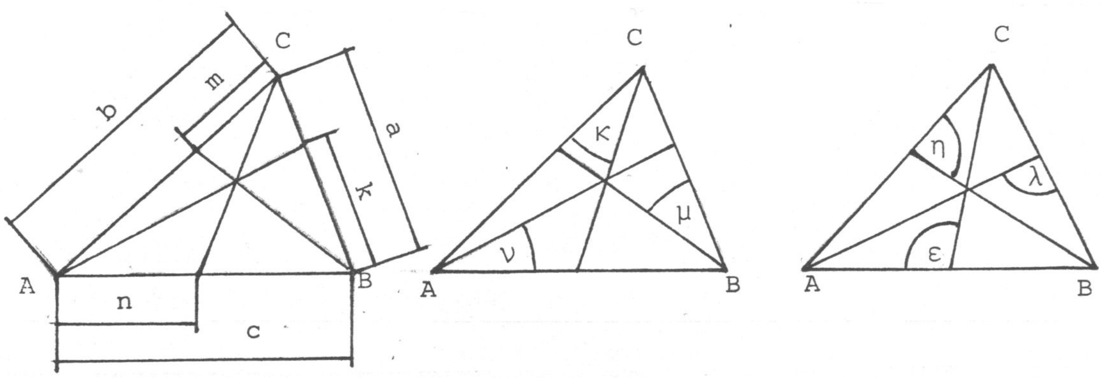
20. Man beweise mit Hilfe des Satzes von CEVA die Sätze über die besonderen Punkte im Dreieck.

21. Welche Gründe sprechen für bzw. gegen eine Aufnahme des vorliegenden Kapitels in den gymnasialen Mathematikunterricht?

Die Antworten:

Zu 14. bis 17.
Die Lösungen der Konstruktionsaufgaben findet man in BAPTIST [1] auf den Seiten 217 bis 219.

Zu 18.
Der Satz von CEVA:
Notwendig und hinreichend für die Existenz eines Ecktransversalenschnittpunkts in einem Dreieck ist eine der folgenden Bedingungen:
$(a - k)(b - m)(c - n) = kmn$
$\sin(\lambda + \beta)\sin(\gamma + \eta)\sin(\varepsilon + \alpha) = \sin(\lambda - \gamma)\sin(\eta - \alpha)\sin(\varepsilon - \beta)$
$\sin(\alpha - \kappa)\sin(\beta - \mu)\sin(\gamma - \nu) = \sin\kappa \sin\mu \sin\nu$
Hierbei kann man die Bedeutung der verwendeten Größen den folgenden Zeichnungen entnehmen.



Historische Zusammenhänge hierzu findet man bei BAPTIST [1]. Da es bei den Aussagen offenbar um Streckenverhältnisse geht, kann man einen Beweis nur ab Jahrgangsstufe 9 bzw. mit Trigonometrie erwarten, wenn man nicht das "physikalische" Hilfsmittel des Problems 19 benutzen will.

Zu 19.
Die Überlegung ist nach neuem Lehrplan ab Jahrgangsstufe 8 möglich, wenn das Hebelgesetz im Physikunterricht behandelt ist. Mit den im Satz von CEVA benutzten Größen gilt dann für die Massen m_a, m_b und m_c:
$m_a:m_b = (c-n):n$, $m_b:m_c = (a-k):k$, $m_c:m_a = (b-m):m$,
weil es im Dreieck nur einen Schwerpunkt gibt. Hieraus folgt unmittelbar die erste Behauptung in der obigen Formulierung des Satzes von CEVA.

Zu 20.
Die verlangten Beweise können durch Rechnung erbracht werden.

Zu 21.
Von der Sache her ist es durchaus vorstellbar, die genannten neuen Inhalte um den Satz von CEVA etwa so, wie dies bei BAPTIST [1] angesprochen wird, in das Curriculum aufzunehmen. Es kann aber auch z.B. nur ein Teil in der Jahrgangsstufe 10 im Bereich von Übungsaufgaben Verwendung finden. Wichtig ist eigentlich nur, daß diese Dinge im Gesamtcurriculum mit einem gewissen inneren Zusammenhang gelehrt werden, wie dies etwa dieser Artikel darzustellen versucht. Sicher reicht es dabei nicht, wenn der Zusammenhang nur im Hinblick auf die Entstehungsgeschichte im 19.Jahrhundert fußt, wie dies etwa meines Erachtens bei BAPTIST [1] zu offensichtlich ist.

Eigentlich benötigt das Gymnasium in seinem Mathematikunterricht keine weiteren innermathematischen Problemstellungen. Wie bereits oben gesagt wurde, gibt es ja in diesem Bereich offenbar keine außermathematischen Anwendungen, die dann im Hinblick des Sich-öffnens des Gymnasiums nach außen zum Tragen kommen könnten. D.h. hinsichtlich der vorhandenen Vielfalt kann man wohl auf die im vorliegenden Kapitel dargestellten Zusatzinhalte verzichten, wenn man sie nicht z.B. im Rahmen von Facharbeiten oder der Begabtenförderung nutzen will.

5. Weiterer Ausbau

Nach EULER wird der folgende Satz benannt:

Satz: In einem Dreieck liegen der Höhenschnittpunkt H, der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt M auf einer Geraden; es gilt: Die Streckenlängen von HS und SM verhalten sich wie 2:1.

Auf KARL WILHELM FEUERBACH (1800 - 1834) geht u.a. der folgende Satz zurück:

Satz über den sogenannten Neunpunktekreis:
In einem Dreieck liegen die drei Höhenfußpunkte, die Seitenmitten und die Mitten der Verbindungsstrecken von den Ecken zum Höhenschnittpunkt alle auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf der EULER-Geraden liegt und die Strecke zwischen dem Höhenschnittpunkt und dem Umkreismittelpunkt halbiert.

Zusatz von FEUERBACH:
Der Neunpunktekreis berührt den Inkreis und die Ankreise.

Einen schulgerechten Aufbau hierzu findet man bei HEFENDEHL-HEBEKER [1] 1988. Mehr zum Thema läßt sich bei H.S.M. COXETER und S.L. GREITZER [1] 1983 nachlesen.

6.Stellenwert des Projekts

Wie bereits der mit physikalischen Betrachtungen angedeutete Beweis des Satzes von CEVA zeigt, haben die Probleme um diesen Satz etwas mit der Schwerpunktsbestimmung von Systemen aus Massenpunkten zu tun. Analog hierzu kann man mit solchen Überlegungen Schwerpunkte homogener, gleich dicker Körper berechnen, wenn ihre Form geometrisch hinreichend gut beschrieben werden kann. Es muß dabei nicht bei dem im Physikunterricht üblichen L-Körper bleiben.

Der eigentliche Stellenwert liegt aber wohl im Bereich der Dauer des sich über mehrere Schuljahre hinweg erstreckenden Projekts. Obige Hinweise mögen dazu beitragen, daß die angesprochenen Inhalte nicht mehr "zerflattern", sondern unter Gesichtspunkten zusammengefaßt im Unterricht erscheinen. Hierbei ist es sicher nicht wichtig, alle genannten Gesichtspunkte stets zu vertreten. Es geht aber auch darum, eine Methode zu entwickeln, die bei ähnlich gelagerten Problemen einsetzbar ist. Sicher sind wir in diesem Bereich noch am Anfang.

Ein innermathematisches Projekt, wie das vorgeführte, dient weniger dazu, Schüler oder auch nur Lehrer zu einer Art Pseudoforschung zu veranlassen, sondern soll vielmehr Sicherheit im Bereich vom Auffinden von Beweisstrategien u.ä. erzeugen.

Die Klammer des Projekts kann dazu dienen, sich nicht mehr so sehr in der Darstellung von Einzelfällen zu verlieren, sondern Wesentliches beizutragen, daß der Schüler weniger schnell vergißt, weil der Gesamtthemenbereich immer wieder über Jahre hinweg angesprochen wird. Hierzu ist allerdings auch ein neuer Schulbuchtyp wie etwa bei MEYER [1] erforderlich. Man wird so fleißige Schüler vom sinnlosen Auswendiglernen wegbringen und ihnen dafür mehr Wendigkeit im Umgang mit Mathematik vermitteln, auch wenn hier betont werden muß, daß es selbst in diesem Fach nicht ohne Lernen gehen wird; denn wer mehr weiß, erkennt mehr und löst so Probleme besser.

Last not least ist der historische Ablauf der Entwicklunsggeschichte der merkwürdigen Punkte im 19. Jahrhundert nicht ohne Interesse für das Gymnasium. Es kann hierbei guten Gewissens auf BAPTIST [1] verwiesen werden.

Will man zukünftig mit solchen innermathematischen Projekten und auch mit anderem den Unterricht vertiefen, muß allgemein erkannt werden, daß dies nur möglich ist, wenn keine weitere Unterrichtszeit dieses Fach abgetreten werden muß.

7. Literatur

Baptist, Peter [1]: Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie, Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik Band 19, BI Wissenschaftsverlag Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich 1992

Berkhan, G. und Meyer, W.F. [1]: Neuere Dreiecksgeometrie, in: Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften Band 3, 1.Teil, 2.Hälfte, Leipzig 1914, Seiten 1173 - 1276

Coxeter, H.S.M. und Greitzer, S.L. [1]: Zeitlose Geometrie, Stuttgart 1983

Hefendehl-Hebeker, L. [1]: Merkwürdige Punkte im Dreieck, Mathematikinformation Heft 23, 1988, Seiten 32 - 36

Hilbert, D. [1]: Grun dlagen der Geometrie, 9.Auflage, Stuttgart 1962

Fritsch, R. [1]: Merkwürdige Kugeln am Tetraeder, Didaktik der Mathematik Teil 1, Heft 4 1983, Seiten 262- - 269, Teil 2, Heft 1 1984, Seiten 18 - 35

Meyer, Kh. u.a. [1]: Brennpunkt Geometrie 7, 1988
Brennpunkt Geometrie 8, 1991
Brennpunkt Geometrie 9 und 10, Erscheiungsdatum unbekannt,
alle bei Schroedel- Schulbuchverlag GmbH Hannover