Karlhorst Meyer

Vom intuitiven zum systematischen Lösen von Gleichungen, dargestellt an Beispielen der Lehrbuchreihe BRENNPUNKT[1]

Eine Gleichung soll gelöst werden: $3 + \square = 7$
Oder in der üblichen Schreibweise: $3 + x = 7$
Ausdrucksstärker ist hier wohl die Wortform dieses Ansatzes:
"Welche Zahl muß man zu drei addieren, um sieben zu erhalten?"

Probleme dieser Art kennt der Schüler aus seiner Grundschulzeit; kaum ein Arithmetikunterricht der Jahrgangsstufe 5 verzichtet auf Textaufgaben, wie die eben geschilderte. Wissen wir doch, daß das Zahlgefühl des Schülers bereits beim Übertritt ans Gymnasium so weit entwickelt ist, daß ihm intuitiv, also unbewußt, ohne Nachdenken die Lösung $x = 4$ einfällt.

Intuition, also eine Eingebung, ein plötzliches Erfassen der Situation, liefert dem Schüler die Lösung. Intuition ist für die Mathematik, vor allem beim Suchen von Strategien, wichtig; das wissen wir alle: Wir brauchen Intuition beim Konstruieren von Beweisen wie auch bei Konstruktionen der Geometrie. In noch viel höherem Maß benötigen wir Intuition beim Aufstellen einer Theorie, eines Kalküls, wenn es gilt, einem Problem nahe zu kommen, oder es gar zu lösen. Obwohl dies Mathematiklehrern wohl bekannt ist und sie darüber hinaus die Erfahrung haben, daß nur die allerwenigsten Schüler diesbezüglich je erfolgreich werden, kennen sie doch bis heute kein anerkanntes Verfahren, die Intuition ihrer Schüler anzuheben. Die neue Mathematiklehrbuchreihe BRENNPUNKT hat hier sicher auch kein Patentrezept anzubieten, doch bemüht sie sich, Intuition und anderes, was der Schüler ans Gymnasium mitbringt, aufzugreifen und möglichst weiter zu entwickeln.

So kann ich im folgenden nur einige, den Autoren von BRENNPUNKT wichtige Argumente zusammenstellen:

1. Was scheint bei der Förderung der Intuition der Schüler bedeutsam?

Häufig scheint Mathematikunterricht den Eindruck zu erwecken, als könne man wenig für die eigene mathematische Intuition tun: Es gibt Glückliche, die eben immer in der richtigen Situation ihre Intuition haben und den Lösungsweg finden und es gibt weniger Glückliche, die eigentlich nie so richtig erfahren, wie man es anstellt, um auch einmal eine Strategie zu entwickeln.

---

[1] gleichnamiger Vortrag der Bundestagung für Didaktik der Mathematik, Universität Würzburg 3.März 1988

Auch wenn hierzu im Augenblick nichts Endgültiges gesagt werden kann, so ist es doch möglich, einige in BRENNPUNKT realisierte Gesichtspunkte weiterzugeben:

1.1 mathematische Vorerfahrungen

Der Schüler denkt im Unterricht sicher öfter an seine Vorerfahrungen, als wir in Rechnung setzen. Statt sie einfach zu unterdrücken - das machen wi jetzt so, was geht uns an, was früher war - , sollten wir die vorhandenen Vorerfahrungen gezielt einsetzen und fördern, also immer wieder hera ziehen zum besseren Verständnis dessen, was wir gerade unterrichten.
Hierzu scheinen mir die folgenden Punkte wichtig:

a) Schülerverhalten, vor allem wenn es sich um auffälliges Fehlverhalten handelt, zu beobachten, auch zu analysieren.

b) Früher Gelerntes immer wieder in Beziehung setzen zum gerade Gelehrten Hierzu ist natürlich erforderlich, die Lerninhalte und anderes z.B. aus der Grundschule zu kennen.

   Die Vorerfahrungen verleiten den Schüler gelegentlich auch zu Fehlern. So ist z.B. der folgende Fehler für die Jahrgangsstufe 5 typisch:

   $2 \cdot 3 = 6 + 2 = 8$

   Etwas übertrieben zeigt der folgende Satz, daß die mathematische Zeich setzung einem 5-Klaßler manchmal durchaus nicht einleuchtet:

   Katze + Hund kommen =.

   Solcher Zeichenmißbrauch verschwindet bei manchem Schüler erst, wenn der Lehrer gewillt ist, "Gewalt" anzuwenden, also bereit ist, diese Verstöße als volle Fehler dem Schüler aufzurechnen.

   Andererseits sollten uns aber gerade diese Beobachtungen nicht abhalte die Vorerfahrungen des Schülers zu nutzen, weil wir so, gerade hinsich lich solcher Fehler wie oben, rechtzeitig den Schüler korrigieren können.

1.2 Probieren und Experimentieren, Spezialisieren und Analogisieren

Immer wieder hält BRENNPUNKT den Leser, den Schüler, an, den Mut zu haben Beispiele auszuprobieren, Zahlenbeispiele zu rechnen, mit dem Zeichengerät eine geometrische Situation im Raum zu stellen, Auszuschneiden, später dann an geeigneten Zeichnungen Zusammenhänge zu erkennen, Spezialfälle zu lösen. Es versteht sich von selbst, daß dies in der Regel nicht beim ersten Versuch zur erwünschten Intuition führt. BRENNPUNKT leitet hierbei nicht mit einer Holzhammermethode: "Nimm deine Schere, schneide a und probiere, finde einen Zusammenhang". BRENNPUNKT geht vielmehr so vor, daß etwa im Bereich der Beispiele solche Situationen des Probierens, des Experimentierens vorgeführt werden. Es ist dann der Freiheit des einzelne Kollegen überlassen, inwieweit er solches im Aufgabenteil weiterträgt. Waren sich die Autoren doch bewußt, daß der beschriebene Weg sicher nicht der einzig mögliche ist.

Kann man ein Problem nicht lösen, so ist u.U. eine Lösung in einem Spezial fall möglich. Hat man den Mut, diesen wiederum zu verallgemeinern, so erhält man u.U. eine Lösungsidee. Intuition ist also oft gar nicht so sehr die Folge eines zufälligen Denkvorgangs, sondern die Folge von erfahrenem Handeln.
Ähnlich verhält es sich mit dem Analogisieren, das weiter unten in einem konkreten Fall angesprochen werden soll.

1.3 Vorerfahrungen bewußt schaffen

Es wäre ein Unding, die Vorerfahrungen des Schülers bei den Kenntnissen au seiner Grundschulzeit zu belassen. Auch wäre dies schon deshalb nicht mög lich, weil wir laufend Neues lehren, was nun erneut zu Vorerfahrungen füh die ihrerseits nun im Unterbewußten auf Abruf warten. Hier hilft BRENN-

PUNKT auch dadurch, daß die Autoren sehr bemüht waren, den zukünftigen Weg des Curriculums anzudeuten, wo immer dies möglich war, Ausblicke zu geben, eben nicht nur die unmittelbaren Lerninhalte ohne Umfeld zu lehre Darüber hinaus muß vor allem der Lehrer selbst sich bemühen, die weitere Ziele der gymnasialen Mathematik vor Augen zu haben, um sein eigenes Tun später, auf einer höheren Stufe, nicht widerrufen oder zumindest wesentlich verändern zu müssen. Eine solche Einstellung, aber auch das Bemühen Allgemeinbildung durch Fächerübergriff u.a. zu vermitteln, geben dem Schüler laufend nebenher Impulse, die an späterer Stelle aufgegriffen und ve tieft werden können. Wir nannten dies integriertes Lernen, das an der Schule auch hinsichtlich einer späteren Berufsausübung geübt werden muß. An anderer Stelle ist hierüber genauer zu berichten.

1.4 Verträglichkeit von Intuition und Systematik

Selbstverständlich bemüht sich BRENNPUNKT darum, Denkweise, Sprache des Schülers allmählich - d.h. nicht auf Biegen und Brechen - exakter werden zu lassen. Hierzu muß unter anderem auch allmählich, durch einen systematischen Aufbau dessen, was wir lehren, der innere Zusammenhang der Mathematik dem Schüler vermittelt werden. Wenn ich oben vom Lösen durch Analogisieren sprach, darf es natürlich nicht bei diesem Handeln bleiben, ohn daß nicht wenigstens angedeutet wird, wann ein Analogschluß zulässig ist dies sollte auch in Jahrgangsstufe 5 unser Anliegen sein. Später wird es nicht beim Andeuten bleiben, sondern das strenge Beweisen wird klären, wann solche Schlüsse legal sind.

Trotzdem möchte ich mich nicht so verstanden wissen, daß sozusagen die Intuition das Charakteristikum der Unterstufe ist, das dann allmählich von der Systematik z.B. des Beweisens abgelöst wird. Ganz im Gegenteil bin ich der Meinung, daß man beides braucht und beides im Unterricht und auch immer dort, wo man Mathematik betreibt, notwendig ist:

Die Intuition gibt uns die Ideen zum Auffinden der Lösungswege usw.
Die Systematik gibt uns das Werkzeug, das uns prüfen läßt, ob uns diese Intuition nicht einen Irrweg vorgaukelt. Diese beiden Sätze haben die Autoren von BRENNPUNKT weitgehend geleitet. Unser Handeln ist dann etwa durch die folgende These bestimmt gewesen:
Die Intuition sollte mit der im Unterricht zu entwickelnden Systematik nicht zu weit auseinanderklaffen. D.h.: Dort, wo wir uns von Intuition lenken lassen, müssen wir dem Schüler die Notwendigkeit einer systematischen Untersuchung nahebringen; dort, wo wir die Systematik auseinandersetzen, muß man dem Schüler zumindest andeuten, daß diese durch Intuitic gefunden wurde.

1.5 Intuition, eine Erfahrungssache

Es ist ein offenes Geheimnis, daß derjenige, der mehr Mathematik kann, mehr Einfälle, also mehr Intuition hat, damit auch der erfolgreichere Mathematiker ist. Aus diesem Grund sind Lehrer verpflichtet, die Vielfalt von Lösungsverfahren im Wissen ihrer Schüler laufend zu vergrößern BRENNPUNKT macht dies z.B. dadurch deutlich, daß die im Zusammenhang mi Verfahren stehenden Hefteinträge des Schülers im Buch durch blaue Farbraster hervorgehoben sind. Um gerade hinsichtlich solcher Verfahren geg die Vergeßlichkeit der Schüler anzukämpfen, haben wir immer wieder, mei überraschend und unangesagt, im Aufgabenteil diesbezügliche Wiederholun aufgaben eingestreut. Die folgende Liste gibt einen Überblick solcher Verfahren der Jahrgangsstufe 5:

Zählen und Anordnen Seiten15 bis 20, 35 bis 38 und andere:
Lösung kombinatorischer Probleme (nur angedeutet)

graphische Methoden zum Sichtbarmachen von Problemen
bei Zahlen Seite 19 und später
beim "funktionalen"Zusammenhang ab Seite 96
Struktuieren mit einem Baum ab Seite 46

Schätzen, Runden, Genauigkeit, Toleranz, Intervalle laufend
Überschlagsrechnung, praktisches Rechnen, Zahlgefühl Seiten26 bis 28

Zahlenbeispiele finden
um Rechengesetze zu finden ab Seite 42
um Analogieschlüsse durchzuführen ab Seite 54

Rechnen mit Tabellen
um Gleichungen zu lösen ab Seite 35 (37!)
um einen Ansatz zu finden ab Seite 51 (99!)
um kaufmännisches Rechnen zu üben ab Seite 61

Ansatz finden durch
schrittweises Übersetzen des Textes in mathematische Symbolik - laufend
Tabellen ab Seite 51.

spezielle Verfahren
Teilen und Messen ab Seite 88
Maßstab ab Seite 93
Mittelsenkrechte ab Seite 95
ggt und kgV-typische Aufgaben ab Seite 116

Anheben der geometrischen Vorstellung
Basteln ab Seite 131
Zeichnen ab Seite 142
Spielen mit dem Zeichengerät, z.B. Seite 130

2. Weshalb der Einstieg ins Gleichungslösen bereits in Jahrgangsstufe 5?

In der Mathematik wird gerechnet, für den Schüler zunächst in den Grundrechnungsarten der Grundschule. Dort, wo man die Reihenfolge der Rechenanweisungen kennt - vorausgesetzt natürlich, man kennt sie alle - ist das rechnerische Handeln vorgegeben, muß also nur ausgeführt werden. Ein solches Handeln nennen wir "Ausrechnen" oder sprechen von einer "Ausrechnung". In der Regel wird man nicht in einem Schritt zum Ergebnis kommen, es wird Zwischenschritte geben, wobei sich der Schüler erst allmählich an den Gebrauch des Zeichens = gewöhnt. Beschränkt man sich auf solches Ausrechnen in Jahrgangsstufe 5, so muß man auf manch schöne Textaufgabe verzichten, oder sie ohne x- Ansatz umständlich lösen.

2.1 Naheliegendere Lösungen bei manchen Textaufgaben

Betrachten wir einmal die einfache Aufgabe Nr.3a auf Seite 83:
Der wesentliche Satzteil heißt: Welche Zahl (x) muß man mit a multiplizieren, um das Produkt b zu erhalten? Verläßt man sich hier nur auf die Intuition der Schüler, so besagt diese x = b:a usw.
Nachteil eines solchen Vorgehens ist, daß man so kaum die Möglichkeit hat, den entscheidenden Gedanken, der zur Lösung x = b:a führt, z.B. in einem Hefteintrag schriftlich festzuhalten.
Das schrittweise Übersetzen eines Textes in Symbolsprache führt hier zu dem Ansatz x·a = b, und zwar ohne Tricks. Deshalb glauben wir, auf das Gleichungslösen in Jahrgangsstufe 5 nicht verzichten zu können, der bayerische Lehrplan sieht ja das auch vor.

2.2 Umkehroperationen

Die Umkehrrechenoperationen lassen sich von Anfang an begründen, wenn man eine, wenn auch primitive Gleichungslehre zur Verfügung hat. Insbe-

Zählen und Anordnen Seiten 15 bis 20, 35 bis 38 und andere:
Lösung kombinatorischer Probleme (nur angedeutet)

graphische Methoden zum Sichtbarmachen von Problemen
bei Zahlen Seite 19 und später
beim "funktionalen" Zusammenhang ab Seite 96
Struktuieren mit einem Baum ab Seite 46

Schätzen, Runden, Genauigkeit, Toleranz, Intervalle laufend
Überschlagsrechnung, praktisches Rechnen, Zahlgefühl Seiten 26 bis 28

Zahlenbeispiele finden
um Rechengesetze zu finden ab Seite 42
um Analogieschlüsse durchzuführen ab Seite 54

Rechnen mit Tabellen
um Gleichungen zu lösen ab Seite 35 (37!)
um einen Ansatz zu finden ab Seite 51 (99!)
um kaufmännisches Rechnen zu üben ab Seite 61

Ansatz finden durch
schrittweises Übersetzen des Textes in mathematische Symbolik - laufend
Tabellen ab Seite 51.

spezielle Verfahren
Teilen und Messen ab Seite 88
Maßstab ab Seite 93
Mittelsenkrechte ab Seite 95
ggt und kgV-typische Aufgaben ab Seite 116

Anheben der geometrischen Vorstellung
Basteln ab Seite 131
Zeichnen ab Seite 142
Spielen mit dem Zeichengerät, z.B. Seite 130

2. Weshalb der Einstieg ins Gleichungslösen bereits in Jahrgangsstufe 5?

In der Mathematik wird gerechnet, für den Schüler zunächst in den Grundrechnungsarten der Grundschule. Dort, wo man die Reihenfolge der Rechenanweisungen kennt - vorausgesetzt natürlich, man kennt sie alle - ist das rechnerische Handeln vorgegeben, muß also nur ausgeführt werden. Ein solches Handeln nennen wir "Ausrechnen" oder sprechen von einer "Ausrechnung". In der Regel wird man nicht in einem Schritt zum Ergebnis kommen, es wird Zwischenschritte geben, wobei sich der Schüler erst allmählich an den Gebrauch des Zeichens = gewöhnt. Beschränkt man sich auf solches Ausrechnen in Jahrgangsstufe 5, so muß man auf manch schöne Textaufgabe verzichten, oder sie ohne x- Ansatz umständlich lösen.

2.1 Naheliegendere Lösungen bei manchen Textaufgaben

Betrachten wir einmal die einfache Aufgabe Nr.3a auf Seite 83:
Der wesentliche Satzteil heißt: Welche Zahl (x) muß man mit a multiplizieren, um das Produkt b zu erhalten? Verläßt man sich hier nur auf die Intuition der Schüler, so besagt diese x = b:a usw.
Nachteil eines solchen Vorgehens ist, daß man so kaum die Möglichkeit hat, den entscheidenden Gedanken, der zur Lösung x = b:a führt, z.B. in einem Hefteintrag schriftlich festzuhalten.
Das schrittweise Übersetzen eines Textes in Symbolsprache führt hier zu dem Ansatz $x \cdot a = b$, und zwar ohne Tricks. Deshalb glauben wir, auf das Gleichungslösen in Jahrgangsstufe 5 nicht verzichten zu können, der bayerische Lehrplan sieht ja das auch vor.

2.2 Umkehroperationen

Die Umkehrrechenoperationen lassen sich von Anfang an begründen, wenn man eine, wenn auch primitive Gleichungslehre zur Verfügung hat. Insbesondere gewinnt man beim Hauptsatz der Bruchrechnung Vorteile: Jeder Bruch $\frac{z}{n}$ is Lösung einer Gleichung und deshalb ein Quotient z:n.

2.3 Vorteile für die später folgende Algebra

Kann der Schüler bereits aus Jahrgangsstufe 5 Gleichungen lösen und ist mit dem Wesen einer Gleichung vertraut, so kann die Algebraisierung der früher gelernten Verfahren in Jahrgangsstufe 7 vertieft erfolgen.

3. Wie erfolgt der Einstieg in Jahrgangsstufe 5

3 + □ = 7 oder jetzt etwas algebraischer 3 + x = 7 führt zu der "geratenen" Lösung 4. Im Nachhinein vergleicht man die Zahlen 3 und 7 mit 4 und findet x = 7 - 3.

Das läßt sich natürlich nur für kleine Zahlen so durchführen. Wie verfähr man gleich anschließend mit größeren Zahlen, wo auch bei geschulten Schülern das Zahlgefühl zunächst versagt:

3.1 Lösen durch Zählen (Hochzählen, Herabzählen u.ä.)

34 612 + x = 34 807 kann zunächst nicht jeder Schüler lösen, es sei denn, er führt gleich einen Analogieschluß durch und löst
x = 34 807 - 34 612.
Gymnasial ist dieser Schritt allerdings erst dann, wenn die Frage geklärt ist, ob man einen solchen Schluß durchführen <u>darf</u>. Deshalb müssen unbedingt am Gymnasium Verfahren entwickelt werden, die dies zeigen:

Man zählt hoch, natürlich in sinnvollen Schritten:

34 612	+	x	=	34 807	Erstes Ziel ist 34 620.
34 612	+	8	=	34 620	Das nächste Ziel ist 34 700.
34 612	+	88	=	34 700	Das nächste Ziel ist 34 800.
34 612	+	188	=	34 800	Das nächste Ziel ist 34 807.
34 612	+	(188 + 7)	=	34 807	oder, da 188 + 7 = 195, haben wir ge-
gefunden:		x	=	195	

Mit dem Verfahren können auch andere Gleichungen gelöst werden.

3.2 Iteratives funktionales Verfahren - gezieltes Einsetzen

Man kann die Zahl auch durch Schätzungen finden, wenn man nur halbwegs gezielt vorgeht. Hier findet man bereits in Jahrgangsstufe 5 das allgemeinste Verfahren, Gleichungen zu lösen, das in der Praxis wohl am häufigsten eingesetzt wird; BRENNPUNKT wird sich bemühen, dieses Verfahren auch in den Folgeklassen immer wieder aufzugreifen, wenn zum Lösen kein anderes Verfahren dem Schüler bekannt ist. So schafft BRENNPUNKT eine weitere Anwendung für den Taschenrechner (in Bayern ab 9) und eine gute Vorübung für die Intervallschachtelungen:

Wir rechnen das Problem in einer Tabelle:

geschätztes x	38 612 + x	Vergleich mit 34 807
200	38 812	zu groß
100	38 712	zu klein
180	38 792	zu klein
190	38 802	zu klein
195	38 807	paßt

also gilt: x = 195

Hierzu braucht man Zahlgefühl, es wird aber auch Zahlgefühl weiterentwickelt. Wie weit man damit bereits in einer 5.Klasse kommen kann, zeiger die Beispiele Nr. 9 auf der Seite 123, hierzu kurz das folgende ausgeführ Beispiel 4 auf der Seite 97:

Finde eine Zahl x für die die Terme 100·x·x und x·x·x - 10 201 gleich si

Lösung:

x	100·x·x		x·x·x − 10 201	Urteil
10	10 000		10 000 − 10 201	ungleich
100	1000 000		1000 000 − 10 201	nahe der Lösung
90	810 000		729 000 − 10 201	x ≈ 100
110	1210 000		1331 000 − 10 201	110 > x > 100
105	1102 500		1157 625 − 10 201	nahe bei 100
101	1020 100	=	1030 301 − 10 201	Lösung

Die erforderlichen Nebenrechnungen wurden entweder nur im Kopf durchgeführt oder hier weggelassen. Ergebnis: x = 101

Dieses Verfahren bietet auch Sicherheit im Umgang mit dem Gleichheitszeichen.

3.3 die Umstellungen

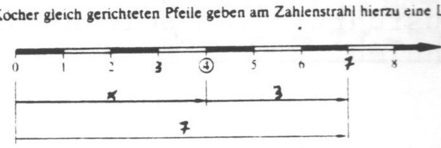
54

3.2 Subtraktion als Umkehrung der Addition

Betrachten wir nochmals die folgenden Aufgaben:

Berechne $7 - 3$: oder löse: $x + 3 = 7$

Die im Kocher gleich gerichteten Pfeile geben am Zahlenstrahl hierzu eine Lösung:



Beachte Während $7 - 3 = 4$ gilt, ist $3 - 7$ für uns nicht berechenbar.
Während $(7 - 3) - 2 = 4 - 2 = 2$ gilt, ist $7 - (3 - 2) = 7 - 1 = 6$.

Das bedeutet:
Das kommutative und das assoziative Gesetz gelten für die Subtraktion *nicht*.
Offenbar gelten die folgenden Rechnungen: $(7 - 3) + 3 = 7$
$(7 + 3) - 3 = 7$

Solches gilt immer: Subtrahiert man von einer Zahl eine andere und addiert diese wieder, so ergibt sich stets die Ausgangszahl. Entsprechendes gilt, wenn man zuerst eine Zahl addiert und dann subtrahiert. Deshalb sagt man in der Mathematik:

Die **Subtraktion ist die Umkehrung der Addition** und die **Addition ist die Umkehrung der Subtraktion.**

Aus $(7 - 3) + 3 = 7$ folgt mit dem Kommutativgesetz der Addition $3 + (7 - 3) = 7$.

Offenbar ist $7 - (7 - 1) = 7 - 6 = 1$
$7 - (7 - 2) = 7 - 5 = 2$
$7 - (7 - 3) = 7 - 4 = 3$ oder $7 - (7 - b) = b$.

D. h. zieht man von der Zahl 7 die um b verminderte Zahl 7 ab, so ergibt sich b.

Wir fassen dies in der folgenden Tabelle zusammen: Die erste Zeile ist jeweils unser Zahlenbeispiel. In der zweiten Zeile haben wir jeweils die Klammer durch eine Unbekannte x ersetzt und damit zwei Rechenausdrücke in x erhalten. Diese Überlegungen geben uns ein Verfahren, Gleichungen zu lösen, das wir **Umstellen (einer Gleichung) nach dem 1. Summanden** usw. nennen.

Merke

Umstellen von Gleichungen:

Beispiel	$(7 - 3) + 3 = 7$	$3 + (7 - 3) = 7$	$(7 + 3) - 3 = 7$	$7 - (7 - 3) = 3$
Zerlegung	$x + 3 = 7$ $x = 7 - 3$	$3 + x = 7$ $x = 7 - 3$	$x - 3 = 7$ $x = 7 + 3$	$7 - x = 3$ $x = 7 - 3$
Umstellen nach dem	**1. Summanden**	**2. Summanden**	**Minuenden**	**Subtrahenden**

55

Die Tabelle ist also zum Beispiel wie folgt zu verstehen:

Aus [redacted] + 3 = 7 folgt die Zerlegung
$x + 3 = 7$
mit x = [redacted]

Merke Die Umstellungen lernen wir nicht auswendig; wollen wir eine Gleichung mit diesem Verfahren lösen, so bauen wir aus kleinen Zahlen eine entsprechende Gleichung und finden durch Raten der Lösung die passende Umstellung.

Zusammengefaßt stellen wir fest:

Merke Zum Lösen von Gleichungen stehen uns die folgenden Methoden zur Verfügung:
(1) Hochzählen
(2) Gezieltes Einsetzen mit einer Tabelle, nachdem eine erste Einsetzung geschätzt ist
(3) Umstellen von Gleichungen

Zum Lösen von Ungleichungen steht nur die Methode des gezielten Einsetzens zur Verfügung.

Bei **Gleichungen mit Klammern** berechnet man *zuerst* die Klammern von innen nach außen und führt *dann* die Gleichung auf eine der genannten Umstellungsarten zurück.

Beispiel 1. $((4 + 3) - 2) - x = 30 - (38 - 12)$
$(7 - 2) - x = 30 - 26$
$5 - x = 4$ Umstellen nach dem Subtrahenden
$x = 5 - 4$
$x = 1$

Halte dich an die vorgeführte Schreibweise, sie vermeidet Rechenfehler!

Um Rechenfehler zu erkennen, führen wir eine sogenannte Probe aus:

Merke **Probe einer Gleichung:**
Hat man die Lösung $x = 1$ für das Beispiel 1 gefunden, so setzt man für x den Wert 1 in die beiden Seiten der Gleichung *getrennt* ein und schreibt:
linke Seite: $((4 + 3) - 2) - 1 = (7 - 2) - 1 = 5 - 1 = 4$
rechte Seite: $30 - (38 - 12) = 30 - 26 = 4$
Beide Seiten ergeben denselben Wert; d. h. unser Ergebnis $x = 1$ ist richtig.

Manche Schüler schreiben am Ende der Probe: „Die Probe stimmt“. Überlege dir, weshalb eine solche Antwort unsinnig ist.

Beachte Eine Gleichung hat immer nur zwei Seiten, zwischen denen [redacted] steht.
Es ist zweckmäßig, die Gleichheitszeichen und die Unbekannte stets untereinander zu schreiben.

Rasch erkennen die Schüler, daß das Wegnehmen und anschließende Hinzufügen derselben Zahl sich gegenseitig aufheben. Aus dieser Erkenntnis <u>folgen</u> die

Umstellungen nach dem 1. und 2. Summanden und nach dem Minuenden, wenn man jeweils die Klammern im "Merke" durch die Unbekannte x ersetzt. Etwas mehr Mühe macht die Umstellung nach dem Subtrahenden. Analoges gilt für den Zusammenhang Multiplikation und Division, auf das hier nicht eingegangen wird.
Diese "Regeln" merken wir uns nicht; der Schüler hat einmal erkannt, daß solche Regeln unabhängig von den gewählten Zahlen gelten und deshalb dur Analogieschlüsse mit kleinen Zahlen stets gefunden werden können.
Um das Vorgehen gleich einem "Ritual" festzulegen, werden am Ende der Gleichungszeilen jeweils die benötigten Umstellungen schriftlich fixiert

$x - 175\,380 = 175\,380$ Umstellung nach dem Minuenden

Der Schüler überlegt sich diese Umstellung, indem er kleine Zahlen wählt
$x - 2 = 4$ Seine Intuition gibt ihm die Lösung $x = 6$ ein
Er überlegt, wie diese Lösung aus den Zahlen 2 und 4 zustande kommt und findet: $x = 4 + 2$
Der Vergleich mit den ursprünglich gegebenen Zahlenwerten ergibt:
$x = 175\,380 + 175\,380$

Es mag Ihnen auffallen, daß wir bei solchen Überlegungen große Zahlen verwenden; dies geschieht aus zwei Gründen:

a) Wir wollen vermeiden, daß der Schüler die Lösung raten kann.
b) Wir wollen erreichen, daß der Schüler die Analogieüberlegungen an kleinen Zahlen als Kopfrechnung ausführt; auch solches hilft, das algebraische Merkgedächtnis zu schulen.

3.4 Die Probe

Mit Absicht haben wir auf das in Bayern für 3.3 übliche Wort "Probe" verzichtet, da die Probe für den Schüler etwas anderes ist; vergleichen Sie hierzu die abgebildete Seite 55.
Die Probe ist vorläufig nur zum Auffinden von Rechenfehlern gut. In der Jahrgangsstufe 9 wird sie allerdings Bestandteil des Lösungsverfahrens, weil dort Gleichungen erstmals mit Umformungen gelöst werden, die die Gleichung nicht mehr gleichwertig umformen (vergl. Jahrgangsstufe 7).

3.5 Nullwerden eines Produkts

Schon ab dem Band 5 bringt BRENNPUNKT immer wieder Beispiele von Gleichungen, die gelöst werden können, weil ein Produkt null ist.

4. Der systematische Aufbau der Gleichungslehre am Gymnasium

Auch wenn man hierzulande scheinbar recht kochbuchrezeptmäßig das Gleichungslösen ab der Jahrgangsstufe 5 betreibt, so muß doch der Lehrer hierbei laufend den weiteren Fortgang vor Augen haben. Gerade dieser Blick nach vorne zeichnet meines Erachtens den gymnasialen Mathematikunterricht aus.

4.1 Gleichwertige Umformungen von Gleichungen

Da BRENNPUNKT ab Jahrgangsstufe 5 laufend Gleichungen bearbeiten läßt, kann die Theorie der gleichwertigen Umformungen ans Ende des Bandes 7 gestellt werden, da es dort wirklich nur noch um die Fundierung dessen, was der Schüler schon immer machte, geht. Wir benutzen das Wort Äquivalenzumformungen nicht, weil wir erst in der Jahrgangsstufe 8 zeigen wollen, daß der Schüler hiermit ein weiteres Beispiel für den Äquivalenzbegriff kennt.

Zwei Definitionen aus Band 7 (Seite 64 und 103) sind entscheidend:

Definition: Zwei Terme, die bei der Belegung der Variablen durch eine Zahl aus der Grundmenge G jeweils denselben Wert ergeben, sind auf G gleichwertig.

Definition: Gleichungen oder Ungleichungen, die über derselben Grundmenge G dieselbe Lösungsmenge haben, heißen (über G) gleichwertig.
Anhand geeigneter Beispiele werden auf den Seiten 103 bis 107 des Bandes 7 die folgenden Umformungsregeln für Gleichungen und Ungleichungen abgeleitet und dann begründet:

Zusammenfassung

Umformungsregeln:

Gleichungen	Ungleichungen
(1) $T_1 = T_2$ gleichwertig zu $T_2 = T_1$	$T_1 \leqq T_2$ gleichwertig zu $T_2 \geqq T_1$
(2) $T_1 = T_2$ gleichwertig zu $T_1 = T_3$, falls T_2 gleichwertig zu T_3	$T_1 \leqq T_2$ gleichwertig zu $T_1 \leqq T_3$, falls T_2 gleichwertig zu T_3

Zusammenfassung

Umformungsregeln:

Gleichungen	**Ungleichungen**
(3) Für beliebige T_3 ist $T_1 = T_2$ gleichwertig zu $T_1 + T_3 = T_2 + T_3$.	**Für beliebige T_3 ist $T_1 \leqq T_2$ gleichwertig zu $T_1 + T_3 \leqq T_2 + T_3$.**
(4) Für beliebige $T_3 \neq 0$ ist $T_1 = T_2$ gleichwertig zu $T_1T_3 = T_2T_3$.	**Für $T_3 > 0$ ist $T_1 \leqq T_2$ gleichwertig zu $T_1T_3 \leqq T_2T_3$.**

4.2 Grundmenge ⊇ Definitionsmenge ⊇ Lösungsmenge

BRENNPUNKT bringt von Anfang an den Zusammenhang zwischen Grundmenge und Lösungsmenge; denn in der Tat ist $x + 3 = 4$ für gerade Zahlen unlösbar. Dagegen sprechen wir erst in der Jahrgangsstufe 8 von der Definitionsmenge einer Gleichung, weil erst dort die Situation auftritt, daß nicht mehr alle Elemente der Grundmenge zum Einsetzen in die Gleichung geeignet sind, weil z.B. Nennernullstellen auftreten können.

4.3 Lösen mit Fallunterscheidungen

wird wie gewohnt ab der Jahrgangsstufe 8 durchgeführt.

4.4 Abschluß der Gleichungslehre

Die am Gymnasium gelehrte Gleichungslehre ist in einem gewissen Sinn abgeschlossen. In der Jahrgangsstufe 9 wird das Lösen einer quadratischen Gleichung, auch unter dem Einsatz einer Lösungsformel, geübt. Das Finden und Anwenden dieser Lösungsformel unterscheidet sich vom Grundsätzlichen her nicht mehr von den CARDANOformeln zum Lösen von Gleichungen 3. oder 4. Ordnung. Die GALOIStheorie aber lehrt, daß keine weiteren Gleichungen abgesehen von Spezialfällen, allgemein gelöst werden können. Das Grundsätzliche beim Lösen eines Gleichungssystems lehren die Jahrgangsstufen 8 und 9 ebenfalls, so daß man sagen kann: Gleichungslehre lernt man umfassend am Gymnasium.
Elemente der Kurvendiskussion bringen bereits in der Jahrgangsstufe 10 Möglichkeiten, weitere Gleichungen, wie Exponentialgleichungen, zu lösen.

5. Anwendungen

BRENNPUNKT bietet laufend eine große Anzahl von Textaufgaben, auch beim Einüben des Gleichungslösens, auch dann noch, wenn das Unterrichtsfach Algebra heißt. Wesentlich hat die Autoren hierbei das Bemühen beeinflußt Fächerübergriff innerhalb der gymnasialen Unterrichtsgebiete, aber auch außerhalb, hin zur Technik, zur Wirtschaft, Umwelt und anderen Bereichen zu pflegen. Zugegeben, zwei zusätzliche Schwierigkeiten handelt man sich so ein:

a) Gelegentlich muß man Fachwissen aus anderen Bereichen dem Schüler wenigstens andeutungsweise vermitteln.

b) Das Auffinden eines sogenannten x-Ansatzes lenkt gelegentlich schon einmal vom bloßen Einüben der algebraischen Mechanismen ab.

Wir sehen aber in unserem Verhalten vor allem die folgenden Vorteile:

a) Der Schüler lernt frühzeitig, seine Umwelt laufend zu beobachten, und sich Wissen auch außerhalb der Schule anzueignen (integriertes Lernen dann aber wieder in der Schule (am Arbeitsplatz) zu verwerten.

b) Weniger Schüler und auch Eltern werden sich in Zukunft fragen müssen, weshalb so viel Abstraktes. vor allem in der Algebra und Arithmetik gelehrt wird. Algebra ist ein nützliche Fach, die Gleichungslehre beweist es. Algebra des Gymnasiums wird mannigfaltig in Wirtschaft und Technik, im Leben, eingesetzt.

6. Schlußwort

BRENNPUNKT wurde heute zum ersten Mal auf einer Tagung vorgestellt. Wir haben uns bemüht, Hintergründe der Besonderheiten dieser Buchreihe - aus Zeitgründen nur an einem Beispiel, eben der Gleichungslehre -auseinande zusetzen. Selbstverständlich haben sich die Autoren von BRENNPUNKT genau so kritisch mit den anderen Problemen des Schulcurriculums auseinandergesetzt. In diesem Zusammenhang darf nur erwähnt werden, daß die BRENNPUNKT-Autoren herausfanden, daß man lehrplangemäß in der Jahrgangsstufe 5 nicht auf eine ausführliche Behandlung der Geometrie verzichten kann, wenn man nicht Gefahr laufen will, daß die Schüler ab Jahrgangsstufe 7 in einer Begriffsflut im Fach Geometrie untergehen. Es ist deshalb erstmals gelungen, den Geometrieanteil in der Jahrgangsstufe 5 so umfangreich zu gestalten, wie dies der bayerische Lehrplan vorsieht.

Literatur:

Lehrplan: Curricularer Lehrplan Mathematik für die 5. bis 8. Jahrgangsstufe des Gymnasiums, Bekanntmachung des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus vom 28.Februar 1977 Nr. II/7-8/11 867, veröffentlicht im Amtsblatt des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus Teil I Sondernummer 15 vom 6.Mai 1977, Seite 499 - 530

Meyer, Karlhorst u.a.: BRENNPUNKT Mathematik
Schülerband 5 Best.Nr. 85805, Hannover 1988 erschienen
Kommentarband und Lösungen 5 Best.Nr. 85825, erscheint 1988
Schülerband 6 Best.Nr. 85806, erscheint 1988
Kommentarband und Lösungen 6 Best.Nr. 85826 in Vorbereitung.
Schülerband 7 Algebra Best.Nr. 85807 erscheint 1988
Kommentarband und Lösungen 7 Algebra in Vorbereitung
Schülerband 7 Geometrie Best.Nr. 85817 in Vorbereitung
Kommentar und Lösungen 7 Geometrie Best.Nr. 85837 in Vorbereitung
Schülerband 8 Algebra Best.Nr. 85808 in Vorbereitung
Kommentar und Lösungen 8 Algebra in Vorbereitung
Schülerband 8 Geometrie Best.Nr. 85818 in Vorbereitung
Kommentar und Lösungen 8 Geometrie in Vorbereitung

Für die Jahrgangsstufen 9 und 10 sind Bände in Vorbereitung.

Anschrift des Autors:
Dr. Karlhorst Meyer, Kyffhäuserstraße 20, 8014 Neubiberg