Dr. Karlhorst Meyer

Konkretes Abbilden beim Konstruieren und Beweisen

Sehr verschiedene Aspekte haben schon immer die Geometrie in ihrer Vielfalt geprägt. Dies gilt für die Geometrie als Wissenschaft und Anwendungsbereich, wie für die Geometrie als Unterrichtsfach. Im folgenden wird eine solche Vielfalt in einem Abschnitt des Lehrplans (vornehmlich des Bayerischen Lehrplans für die Gymnasien Jahrgangsstufen 7 und 8) auseinandergesetzt. Es werden Gedanken wiedergegeben, die ein Lehrer haben sollte, wenn er seinen Unterricht vorbereitet, ohne daß er gleich ein ausgearbeitetes Curriculum vorlegt. Wenn hierbei Fachausdrücke zur Darstellung dieser Gedanken benötigt werden, so sind diese häufig nicht für den Schüler gedacht, sondern dienen nur der Verständigung zwischen Lehrern [1].

1. Mathematischer Hintergrund

Seit FELIX KLEIN untersuchen Mathematiker geometrische Objekte, indem sie auch nach Abbildungen forschen, die gerade diese Objekte als Invarianten haben. So ziehen Untersuchungen über den Abstand die Bewegungsgruppe oder Kongruenzgruppe nach sich, deren Abbildungen eben Abstände invariant lassen. Auf diese Weise knüpften Geometer immer engere Beziehungen zur Gruppentheorie und Algebra. Einen besonderen Höhepunkt erreichten THOMSEN [1] und BACHMANN [1]. Aus Gruppen allein konnten die dazugehörigen Invarianten rekonstruiert werden. Es gelang damit eine einheitliche, erweiterte Definition der absoluten Geometrie. Man konnte das Gemeinsame der metrischen Geometrien (euklidische, hyperbolische und elliptische Geometrie) definieren und weit über diesen Bereich hinaustragen, wenn man etwa an den Gültigkeitsbereich des Höhenschnittpunktsatzes bei Dreiecken denkt. Freilich, es gab auch andere Geometer, die dieser Entwicklung fernblieben; stellvertretend mag eine Gruppe genannt werden, die sich vor allem mit der Untersuchung endlicher Strukturen befaßte und ihre Untersuchungen, Schnittverhalten, Verbinden u.a., ohne Betrachten der dazugehörigen Abbildungsgruppen durchführte (siehe DEMBOWSKI [1]).

Die Schulen waren von dem Vorgehen der Abbildungsgeometer stark beeindruckt und bemühten sich, entsprechendes Gedankengut in den Schulalltag einfließen zu lassen. Diese Entwicklung ist z.B. bei BENDER [1] dargestellt.
In der Folgezeit fehlte es nicht an Kritik. Lehrer beobachteten eine zu starke Algebraisierung des Geometrieunterrichts. Man wollte deshalb zurück zur "guten, alten", d.h. altbewährten Figurengeometrie. Eine Zeitlang sah es fast so aus, als wären Abbildungsgeometrie und konstruierende Geometrie auf der Schule Gegensätze. Schon in MEYER [1] konnte gezeigt werden, daß es sich hierbei keineswegs um Gegensätze handelt, daß vielmehr die neuerdings beim Mathematikunterricht angestrebte Methodenvielfalt uns veranlassen sollte, Abbildungsgeometrie und Figurengeometrie erfolgversprechend miteinander zu verknüpfen.

---
[1] gleichnamiger Vortrag auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Regensburg 22. 9. 1988

Wie dies aussehen kann, und wie damit eine Neubelebung des Abbildungsgedanken am Gymnasium erreicht werden kann, zeigen die folgenden Überlegungen.

2. Propädeutik der Unterstufe

Schon in Jahrgangsstufe 5 lernt der Schüler, mit einigen speziellen Abbildungen umzugehen:
Symmetrische Figuren zeigen eine Symmetrieachse. Jede Figur läßt sich an jeder Geraden zu einer symmetrischen Figur ergänzen, etwa durch Falten eines Blattes und Durchstechen der einzelnen Punkte der gegebenen Figur. Der Schüler beobachtet ähnliches bei Gegenstand und Spiegelbild und nennt deshalb den Vorgang, der zur symmetrischen Figur führt, eine Achsenspiegelung.
Die Drehung lernt er am besten an den ihm bekannten räumlichen Drehvorgängen kennen. Eine Tür dreht sich. Die Bewegung ist festgelegt durch Drehachse und Drehwinkel; letzterer ist orientiert. Die Unterrichtserfahrung zeigt, daß den meisten Schülern dieser räumliche Vorgang einsichtiger ist, als die Projektion in die Ebene. Wenn die Drehachse zum Drehpunkt wird, ist das keine Erleichterung, sondern eine Abstraktion. Aus diesem Grund habe ich auch stets in Klasse 5 die Drehung und Verschiebung vor der Spiegelung behandelt. Am liebsten habe ich es aber bei der Symmetrie und ihrer Erzeugung belassen, ohne auf den Vorgang Spiegeln einzugehen.

Das Verschieben ist durch Richtung und Vorschub im Raum, gleichermaßen in der Ebene, festgelegt. Man sollte bereits in Jahrgangsstufe 5 nicht vergessen, daß es rotationssymmetrische und translationssymmetrische Figuren gibt. Und schon haben wir Möglichkeiten, das Zeichengerät einzusetzen: Aus einer ebenen Figur werden z.B. translationssymmetrische Muster konstruktiv entwickelt, wobei in Klasse 5 Konstruieren vor allem möglichst genaues Abzeichen bedeutet.

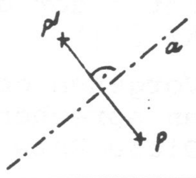
3. Vom Experimentieren zu den Eigenschaften einer Abbildung

Aus dem Vorwissen wird die Spiegelung entwickelt. Der Schüler weiß bereits, symmetrische Figuren entstehen durch Spiegeln an einer Achse. Anhand der oben beschriebenen "Durchstechmethode" werden hinreichende Eigenschaften einer Spiegelung gesucht, die ein Rekonstruieren der Spiegelung mit Zirkel und Lineal ermöglichen. Dieses entdeckende Lernen gibt dem Schüler nicht nur eine Möglichkeit, sprachlich und dann auch konstruktiv den Bildpunkt eines beliebigen Urbildes zu bekommen:

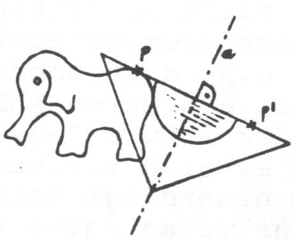
Unsere bisherigen Erfahrungen führen zur folgenden Definition in der Ebene:

Definition

Gegeben ist eine Gerade a. Den folgenden Zuordnungsvorgang $P \mapsto P'$ nennt man Spiegelung s_a an der Spiegel- oder Symmetrieachse a:
Jedem Punkt $P \in a$ wird $P' = P$ zugeordnet.
Jedem Punkt $P \notin a$ wird genau ein P' so zugeordnet, daß die Gerade PP' senkrecht auf a steht und der Schnittpunkt von PP' mit a die Strecke $[PP']$ halbiert.



Aufgaben 6! **Die nebenstehende Abbildung zeigt, wie man mit dem Geodreieck *ohne Durchstechen* spiegeln kann.**
a) Beschreibe, wie man mit dem Geodreieck in der Ebene Punkte spiegeln kann.
b) Erkläre mündlich, weshalb der Punkt P' in obigem Foto im Sinne der Definition der Bildpunkt von P bei der Spiegelung am Spiegel sein muß.



Konstruktion des Spiegelbildes P' zum gegebenen Punkt P bei gegebener Achse a.
Lösung:
(1) Wähle zwei beliebige Punkte A und B auf a.
(2) Zeichne einen Kreis um A mit Radius $|\overline{AP}|$ und einen Kreis um B mit Radius $|\overline{BP}|$.
(3) Die beiden Kreise schneiden sich in P und P'.

Begründung:
P und P' sind von A und B gleich weit entfernt; a ist deshalb Mittelsenkrechte und damit Symmetrieachse zu $\overline{PP'}$.

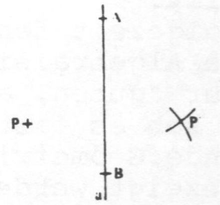


Abb. 1

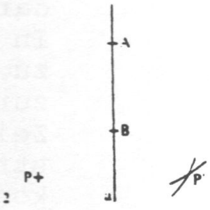


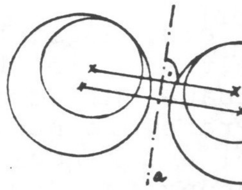
Abb. 2

Symmetrie ist eine Eigenschaft einer "fertigen" Figur; Spiegeln ist ein Vorgang, dem sich alle Punkte nach einer festen Vorschrift zu unterziehen haben.

So entsteht der Begriff Abbildungsvorschrift. Dem Schüler ist einsichtig, daß durch verschiedene Abbildungsvorschriften ein und dieselbe Abbildung beschrieben werden kann. Das sprachliche und damit auch das zeichnerische Fixieren der Abbildungsvorschriften gibt reichlich Anlaß, jetzt nicht mehr experimentell, sondern konstruktiv das Spiegeln, auch mehrfach an verschiedenen Achsen, auszuführen. Die verschiedenen Abbildungsvorschriften sind Anlaß der folgenden Frage: Welche Abbildungsvorschrift ist in einem gegebenen Fall im Sinne von Schnellic keit, Zeichengenauigkeit u.ä., die günstigere?

Aufgaben 9! Begründe mündlich: Das Spiegelbild eines Kreises ist ein Kreis mit gleichem Radius.

10. Spiegle Figuren, die aus Kreisen zusammengesetzt sind. Erfinde auch Figuren, die aus Kreisbögen und Strecken zusammengesetzt sind, und spiegle sie.



13. Zeichne eine Achse a und zwei Geraden g und h, die sich außerhalb der Achse schneide: Konstruiere mit Hilfe der Winkelübertragung die Bilder g' und h' bei Spiegelung an Welche Punkte der obigen Zusammenfassung wurden berücksichtigt.

14. Zeichne in ein Koordinatensystem die Gerade AB und den Winkel ∢ PQR. Spieg den Winkel an der Geraden mit Hilfe der Winkelübertragung. Beschreibe anschließe: die Konstruktion.

a) A(5|0), B(5|5), P(6|1), Q(9|3), R(6|6)

b) A(5|1), B(6|5), P(6|1), Q(8|4), R(4|5)

Einem Fehlschluß von Schülern muß man entgegenwirken: Viele der in der jüngeren Vergangenheit mit Abbildungen in Berührung gekommenen Schüler haben die Meinung, daß jede Abbildung eine Spiegelung oder daraus zusammengesetzt ist, weil im Unterricht vor allem Spiegelungen vorgekommen sind. Diesem Fehlschluß wirkt man dadurch entgegen, daß man immer wieder andere Abbildungen mit ihren Abbildungsvorschriften konstruktiv anwenden läßt. Schülern macht es sichtlich Spaß, wenn sie selbst pathologische Abbildungsvorschriften entwerfen und anwenden dürfen:

"Klausspiegeln" an einer Achse a: P' sei das Klausspiegelbild von P.

(1) Für P auf a sei P = P', also ein Fixpunkt.

(2) Ist P nicht auf a, so fälle das Lot auf a, der Fußpunkt sei F. Dann gelte $\overline{FP'} = 2\cdot\overline{PF}$.

Gerade solche Abbildungen veranlassen Schüler, die für uns wichtige Frage zu stellen: Welche Eigenschaften haben Spiegelungen? D.h.analog zu KLEIN stellen wir also die Frage nach den Invarianten. Das geht natürlich erst dann, wenn der Schüler vor solchen abbildungsgeometrischen Überlegungen bereits konstruktive Erfahrungen im Umgang mit Zirkel und Geodreieck bis hin zur Parallelverschiebung u.a. hat. Dann nämlich ist die Frage, was beim Spiegeln mit rechten Winkeln, mit Winkeln überhaupt, mit Loten, parallelen Geraden, Kreisen und Dreiecken passiert, naheliegend.

Ein Kreis wird gespiegelt. Wir spiegeln zunächst eine Reihe seiner Punkte. Schließlich entdecken die Schüler von selbst, daß unser Tun überflüssig ist, denn sie haben vorher bereits davon gehört, daß der Abstand beim Spiegeln erhalten bleibt. So ist es jetzt naheliegend, den Mittelpunkt abzubilden und einen kongruenten Kreis zu zeichnen. *Solche Konstruktionsaufgaben sind Präbeweise* (vgl.6.).

Die Invarianten einer Spiegelung werden anschließend mehrfach genutzt um weitere Eigenschaften von Bewegungen abzuleiten. Aus diesem Grund werden die Eigenschaften einer Spiegelung zusammengefaßt, ohne daß de Schüler gleich erkennt, wozu er diese Aufzählung noch gebrauchen wird können:

<u>Eigenschaften einer Achsenspiegelung:</u>

(1) Das Bild eines Punktes ist wieder ein Punkt, das Bild einer Gerade ist wieder eine Gerade.

(2) Punkt und Bildpunkt liegen auf einem Lot zur Achse und sind vom Schnittpunkt des Lotes mit dieser Achse gleich weit entfernt. Achsenpunkte sind Fixpunkte.

(3) Strecke und Bildstrecke sind gleich lang.

(4) Winkel und Bildwinkel sind gleich groß; deshalb sind die Bilder

paralleler Geraden wiederum parallele Geraden.
(5) Das Bild einer Achsenparallelen ist eine Achsenparallele auf der anderen Achsenseite.
(6) Sind Gerade und Bildgerade nicht parallel, schneiden sie sich auf der Achse.
(7) Originalkreis und Bildkreis haben denselben Radius.
(8) Original und Bild haben umgekehrten Drehsinn.

4. Das Konstruieren

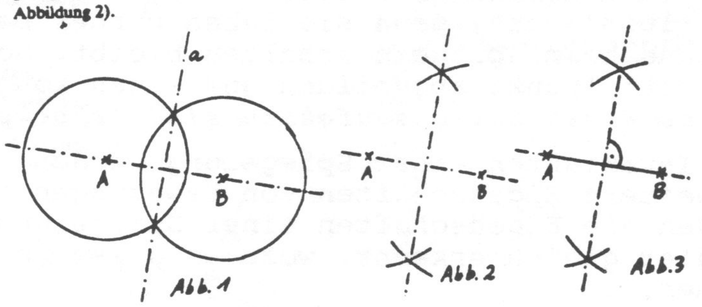
Das Zeichnen per Hand, um dabei eine möglichst hohe Genauigkeit zu erreichen, gehört der Vergangenheit an. Wie oben bereits angedeutet, verlangt eine Konstruktion eine genaue Gliederung des Vorgehens und liefert damit das, was man einen Präbeweis nennt. Hat der Schüler richtig gegliedert, so führen ihn Zirkel und Lineal zum Ziel. D.h. man müßte eigentlich heute eine Rückbesinnung auf das Konstruieren des 19.Jahrhunderts (siehe auch BIEBERBACH [1]) anstreben. Doch bei aller Nostalgie für Konstruktionsbeschreibung bis hin zu Determination sollte man nicht vergessen, daß der Plotter Ellipsen, Hyperbeln und andere Kurven genauso präzise wie Kreise zeichnen kann, und somit trotz aller Bemühungen um das Konstruieren die Frage nach der Konstruierbarkeit allein mit Zirkel und Lineal heute bedeutungslos geworden ist. Der PC samt Plotter entheben uns dieser Probleme.

So steht das Konstruieren der Schüler heute unter einem anderen Aspekt als noch vor wenigen Jahren. Uns geht es jetzt vor allem darum, daß der Schüler lernt, einen *zeichnerischen Algorithmus* aufzubauen, der es ihm jederzeit ermöglicht, einen Plan zur konstruktiven Lösung eines Problems zu entwerfen. Hierzu muß er Konstruktionsschritte kennen, aus denen die Gesamtkonstruktion entsteht.
Wer mit dem Abbildungsgedanken rechtzeitig sein didaktisches Vorgehen unterbaut, hat hier folgende Möglichkeit: *Eine* sogenannte *Grundkonstruktion* entsteht aus einer Abbildungsvorschrift einer Achsenspiegelung, die sich der Schüler anhand der experimentellen "Durchstechmethode" zur Erzeugung symmetrischer Figuren leicht merken kann:

Grundkonstruktion

Konstruiere die Symmetrieachsen zweier Punkte A und B.
Lösung:
Zeichne um A und B zwei sich schneidende Kreise mit *gleichen* Radien. Die Verbindungsgerade der beiden Kreisschnittpunkte ist die eine Symmetrieachse zu A und B, die andere ist AB (vgl. Abbildung 1).

Für die Konstruktion sind die beiden Kreise nur Hilfslinien; sie werden deshalb nicht ganz gezeichnet, sondern nur in der Gegend der beiden Schnittpunkte angedeutet (siehe Abbildung 2).



Aus dieser Grundkonstruktion werden jetzt im wesentlichen 6 Konstruktionsschritte abgeleitet, die dann in den Konstruktionsbeschreibungen nur noch als Namen erscheinen, ohne daß ihr Ablauf jeweils näher beschrieben wird:

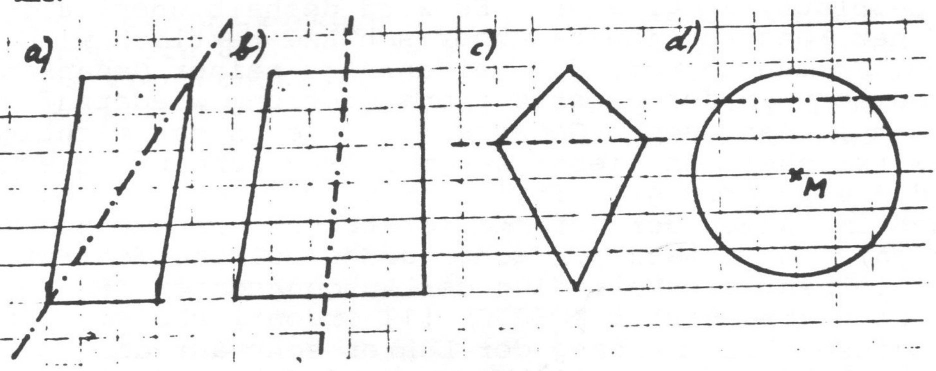
<u>Konstruktionsschritte</u>

(1) Halbierung einer Strecke
(2) Konstruktion eines Spiegelpunktes bei vorgegebenem Urbild und Achse
(3) Halbierung eines Winkels
(4) Errichten eines Lots
(5) Fällen eines Lots
(6) Konstruktion eines 60°-Winkels

Der THALESkreis läßt sich leider nicht in diese Folge einbauen.

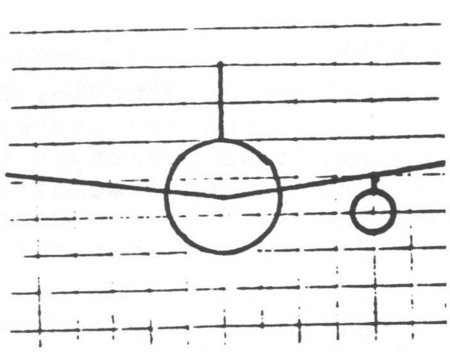
Für manche Lehrer beginnt das Konstruieren erst mit den Kongruenzsätzen was in der Regel Schülern dann zu schwer fällt. So sahen sich andere Lehrer veranlaßt, das Konstruieren auf ein Minimum zu beschränken. Heut wollen wir dies auf keinen Fall mehr, denn wir haben die Erkenntnis, daß das Konstruieren, besser das logische Gliedern in Teilaufgaben, ein wesentlicher Schritt hin zum geometrischen Beweis und damit zum Verstehen der Geometrie darstellt. Das Konstruieren mit Bleistift erscheint uns schülergerecht, da hierbei beim Zeichnen der Denkvorgang durch die Motorik der Hand unterstützt wird. Dann aber sollten wir nich dem alten Fehler verfallen, mit dem Konstruieren erst im Zusammenhang mit den Kongruenzsätzen zu beginnen. Wie reizvoll ein früherer Einstieg sein kann, zeigen die folgenden Aufgaben:

24! Zeichne die folgenden Figuren ab und zeige durch Konstruktion der entsprechenden Spiegelpunkte, daß die Figuren bezüglich der eingezeichneten Achse nicht symmetrisch sind. Sind sie trotzdem achsensymmetrisch? Gibt es Grenzfälle, die achsensymmetrisch sind?



25. Die Punkte A(0|4) und B(5|5) sind Endpunkte des Durchmessers eines Halbkreises. Konstruiere diesen Halbkreis und spiegle ihn dann an der Achse PQ mit P(4|0) und Q(6|5) (mit Konstruktionsbeschreibung).

26. An welchem Punkt muß beim Airbus die zweite Düse angebracht werden? Übertrage dazu die nebenstehende Zeichnung in dein Heft (mit Abzählen der Kästchen) und konstruiere in der Zeichnung den Aufhängepunkt der zweiten Düse.



13! Ein Gärtner will einen Garten achsensymmetrisch anlegen. Wie viele Möglichkeiten hat er bei einem Grundstück, das a) ein Rechteck, b) ein Quadrat ist?

c) Begründe durch Zeichnung, ob der Gärtner einen Viertelkreis benutzen kann.

15. a) Zeichne ein beliebiges Dreieck und konstruiere alle Seitenmittelpunkte. Verbinde diese und beschreibe dein Ergebnis.

b) Zeichne ein beliebiges Viereck und halbiere jede Seite. Verbinde die jeweils benachbarten Seitenmittelpunkte. Beschreibe das Viereck, das du erhalten hast.

Sprechen wir vom *Zeichnen* einer Figur, so sind alle Hilfsmittel des Messens bis hin zum Augenmaß erlaubt, wenn es nur eine möglichst genau Zeichnung ergibt. Manchem Leser wird hierbei die angebliche Genauigkeit desAugenmaßes neu sein; dies ist aber sicher der Fall, wenn z.B. von einem Punkt mit dem Lineal die Tangente an eine gegebene Kurve gelegt werden soll.
Sprechen wir vom *Konstruieren*, so soll mit Zirkel und Lineal eine Zeichnung gefertig werden, wobei der Schüler ebenfalls eine *genaue* Zeichnung erreichen soll; deshalb erlauben wir das Zeichnen von Parallelen und aufeinander senkrechten Geraden durch Parallelverschiebung, wenn die Genauigkeit des Geodreiecks nicht mehr ausreicht, weil alle diesbezüglichen Zirkelkonstruktionen hoffnungslos ungenau sind.

Weshalb sprechen wir immer noch von Genauigkeit einer gymnasialen Zeichnung, wenn der Computer das Problem viel besser löst? Wir meinen, nur einer genauen Zeichnung kann man weitere Ideen entnehmen. Man sollte endlich einsehen, daß zwar eine Zeichnung keine Beweisfähigkeit hat aber unnötige Verzerrungen etwa einer Raute zu einem beliebigen Viereck nie und nimmer erkennen lassen, daß die Diagonalen der Raute sich halbieren und aufeinander senkrecht stehen. Diese Idee muß man aber erst einmal haben, um an einen Beweis hierfür zu denken.

Konstruieren im Zusammenhang mit Abbilden ist also sinnvoll. Für den Schüler müssen aber weitere Hilfsmittel bereit gestellt werden, damit er sich bei mehreren Konstruktionsschritten noch zurecht finden kann. Der Schüler muß lernen, eine Konstruktion, besser einen geometrischen Gedankenablauf, zu gliedern. Es wird deshalb unerläßlich sein, die Planung einer Konstruktion zeichnerisch und textlich wieder mehr zu pflegen. Er muß lernen, die Reihenfolge seiner Gedankenschritte etwa durch Nummern an der Konstruktionszeichnung wiederzufinden. Er muß vor allem lernen, seine Gedankenschritte in der richtigen Reihenfolge zu verwirklichen. In diesem Zusammenhang scheint es erwähnenswert zu sein, daß es hierzu gute Training-software gibt (z.B. KOBESCH [1]), die auch im Rahmen der informationstechnischen Grundbildung (ITG im folgenden) zum Einsatz gebracht werden sollte. Schließlich muß der Schüler lernen, die Variation der Ausgangsdaten (Parameter) abzuschätzen. Auch hierzu bietet KOBESCH [1] ordentliche software. Schließlich muß in diesem Zusammenhang der Lehrer sehr auf den Hefteintrag achten, damit der Schüler lernt sich so auszudrücken, damit ein anderer ihn verstehen kann.

5. Kongruenzen

Als nächstes werden Doppel-, später Mehrfachspiegelungen betrachtet. Der hier skizzierte Weg gestattet sofort, die wesentlichen Eigenschaften von Mehrfachspiegelungen aufzuzählen. Man muß sich nur an die Zusammenfassung der Eigenschaften einer Achsenspiegelung (vgl.3.) erinnern. Die Betrachtung von Doppelspiegelung führt zu Drehungen und Translationen, die zu den eben aufgezählten Eigenschaften zusätzliche haben

Zusätzliche Eigenschaften einer Translation:
(8) Original und Bild haben den gleichen Drehsinn.
(9) Gerade und Bildgerade sind gleich oder parallel.
(10) Punkt und Bildpunkt haben stets voneinander denselben Abstand.

Diese Eigenschaften gewinnt man ebenfalls zunächst aus Experimenten. Dann aber kommt doch die Frage: Muß das immer so sein (siehe 6.)?

Man erhält hierdurch auch neue Abbildungsvorschriften, die z.B. die Verschiebung ohne Zweifachspiegelung festlegen. Es ergibt sich die Frage nach der Gleichwertigkeit der gefundenen Abbildungsvorschriften und wieder steht dem Unterricht ein für den Schüler nicht triviales Beispiel für einen Beweis zur Verfügung.

Der bayerische Lehrplan ist an dieser Stelle genötigt, wegen der Sommerferien eine Zäsur einzulegen. In Klasse 7 folgt noch kurz eine erste Behandlung der Kongruenzsätze.
Der hier skizzierte Weg erlaubt auseinanderzusetzen, was man unter Kongruenz versteht:
Definition: Zwei Figuren sind kongruent, wenn sie durch eine Mehrfachspiegelung auseinander hervorgehen.

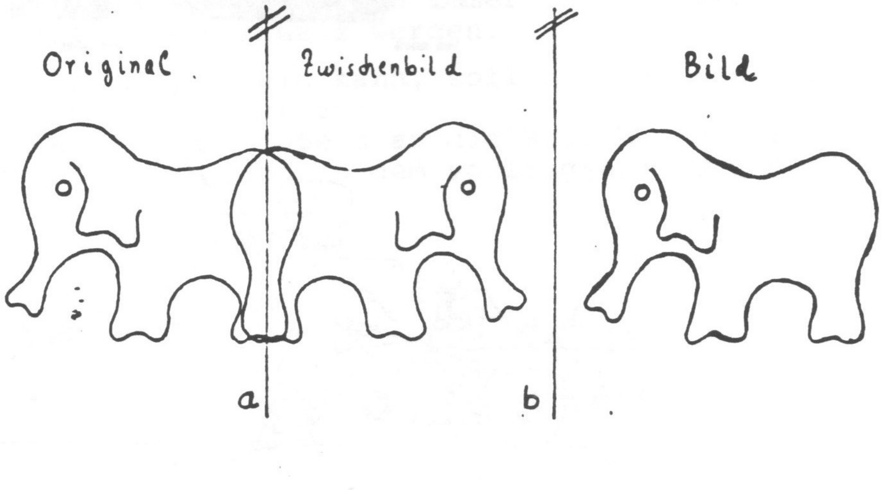
Man sollte sich auch bemühen, wenigstens einen Kongruenzsatz damit zu beweisen. Im Zusammenhang mit der Anwendung der Kongruenzsätze scheint uns wichtig, daß das innere Auge des Schülers so geschult wird, daß er sehen kann, wie durch eine Bewegung zwei Figuren ineinander übergeführt werden. Hier *könnte* der PC eine wichtige Schulung übernehmen, wenn es software gäbe, die benutzerfreundlich ermöglicht, jederzeit eine Teilfigur wegzubewegen und mit einer anderen Teilfigur eventuell zur Deckung zu bringen.

Dieses Abbilden steht auch hier wiederum in Bezug zum Konstruieren: Das Auffinden von geeigneten Teilfiguren bei etwas schwierigeren Konstruktionen erfordert, daß das innere Auge eine vorher beschriebene Schulung erhalten hat. Aber erst dann, wenn man aus Teildreiecken Figuren konstruieren kann, hat man die volle Tragweite der Kongruenzsätze erkannt. Allerdings muß man hierbei erwähnen, daß es in diesem Zusammenhang auch unlösbare Fragestellungen gibt (vgl. HERTERICH [1]).

Der bayerische Lehrplan verlangt eine Auseinandersetzung mit der Erzeugung der Bewegungsgruppe aus Spiegelungen. Deshalb werden zu Beginn der Jahrgangsstufe 8 Schubspiegelung, Dreispiegelungssatz und die Tatsache, daß jede Vierfachspiegelung eine Drehung oder Translation ist, behandelt. Bekanntlich kann man diese Sätze am einfachsten durch eine starke Algebraisierung der Bewegungen erhalten. Das will ich aber hier nicht vorführen.

Vielmehr möchte ich an dieser Stelle auf einige Anwendungsaufgaben zu sprechen kommen, an denen der Schüler mit seinem inneren Auge die damit verbundenen Bewegungsvorgänge beobachten kann. Der Schüler erfährt so, daß Abbildungen und damit die Geometrie in der Technik, in der Kunst und anderswo eine Rolle spielen.
Stellvertretend für viele Beispiele aus MEYER u.a. [2] werden die folgenden Aufgaben und Beispiele erwähnt:

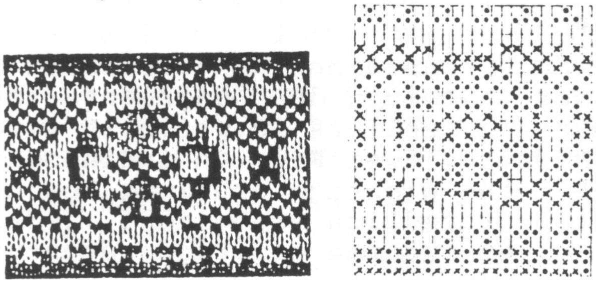
Beispiel **2. Durch Zweifachspiegeln lassen sich beliebige Punkte und Figuren der Ebene abbilden. Allerdings wird die Zeichnung recht unübersichtlich, da man ja immer erst das Spiegelbild an der ersten Achse benötigt.**



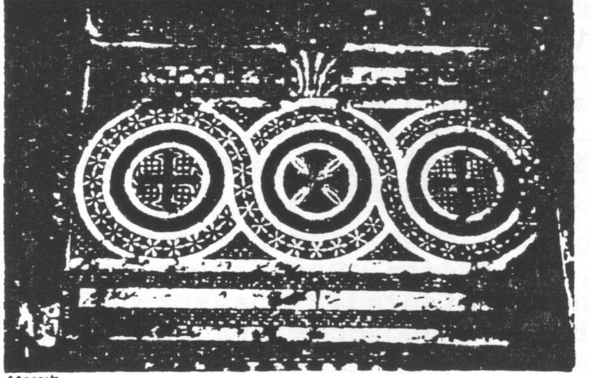
Zusammen-fassung

Von Symmetrie spricht der Mathematiker, wenn sich in einem Muster Teile gesetzmäßig wiederholen. So können zwei Teile einer Figur zueinander achsensymmetrisch oder punktsymmetrisch oder translationssymmetrisch liegen. Teile einer Figur können auch durch eine Drehung miteinander zur Deckung gebracht werden (rotationssymmetrisch liegen).
Wir unterscheiden Achsensymmetrie, Translationssymmetrie, Rotationssymmetrie und Punktsymmetrie.

Aufgabe 10. In den folgenden Beispielen treten mehrere Symmetrieformen gleichzeitig auf. Entdecke möglichst viele Symmetrien:

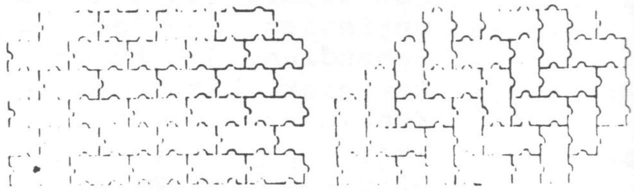


a) Strickmuster in Norwegertechnik: Wer findet den Fehler in der Strickanweisung?

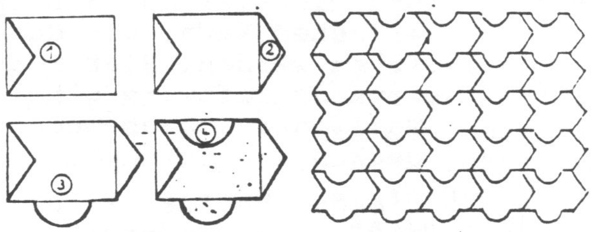


b) Mosaik

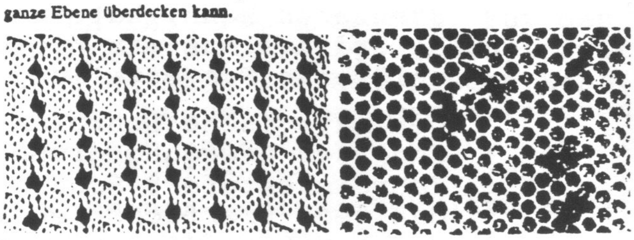
8. Mit Verbundsteinen lassen sich vielfältige Muster legen. Übertrage für die Pflaster in der folgenden Abbildung jeweils eine Grundfigur in dein Heft. Zeige, wie man durch Verschieben der Grundfigur jeweils die ganze Ebene ausfüllen kann. Zeichne die Muster ab und erfinde eigene Pflaster.



9. Erfinde eigene Pflastersteinformen, indem du von einem Rechteck oder von einem Parallelogramm ausgehst. Die folgende Abbildung zeigt, wie man dabei vorgeht.



7. Gib jeweils an, in welchen Richtungen die gezeigten Muster translationssymmetrisch sind. Beschreibe, wie man ausgehend von einer Grundfigur durch Verschieben die ganze Ebene überdecken kann.

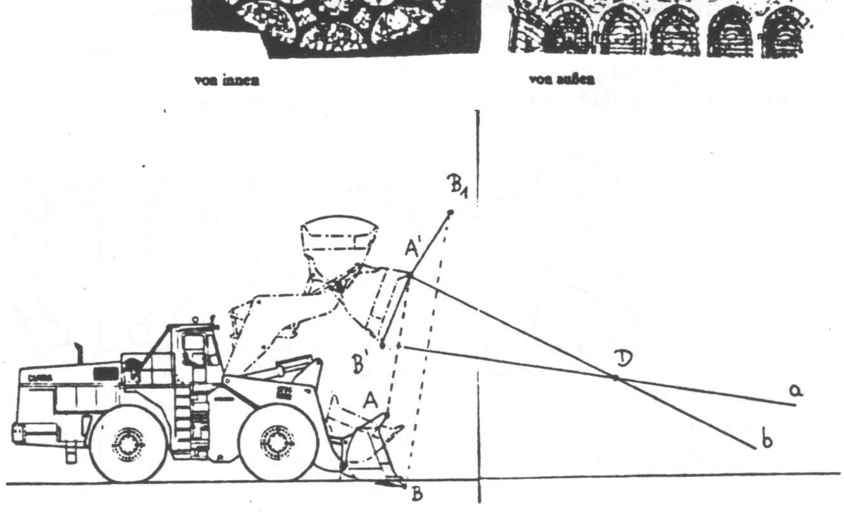


* Aufgaben 9. Schätze, wie viele Schlingen das obige Häkelmuster haben wird, wenn es fertig ist.

* 10. Die folgenden Fotos zeigen die Fensterrose der Kathedrale von Chartres. Welche Kirchen deiner Heimat haben ebenfalls (annähernd) rotationssymmetrische Fenster?

Foto:
Fensterrose (südl. Querhaus um 1225) der Kathedrale von Chartres

von innen　　　　von außen



6. Abbilden und Beweisen

Die moderne Mathematikdidaktik empfiehlt, bei der Auswahl der zu beweisenden Sätze darauf zu achten, daß die Beweisbedürftigkeit dem Schüler erkennbar wird. Das bedeutet, daß der moderne Mathematikunterricht frei von allen Bemühungen der sicher für die Mathematik selbst so wichtigen Grundlagenforschung sein muß.

Anders als zur Zeit der Schulgeometrie, die auf einem Axiomensystem aufbaute, haben wir heute die Schwierigkeit, festzulegen, was ein Beweis an der Schule ist. Wir sollten diese Schwierigkeit nicht unterschätzen. Es gibt Beispiele für"Beweise"an der Schule, bei denen man sehr kompromißbereit sein muß, um sie noch anzuerkennen. Im allgemeinen wird uns eine Behauptung, deren Wahrheit man nicht auf den ersten Blick erklären kann, für einen Beweis geeignet scheinen. D.h. wir werden die Behauptung auf andere für uns als gesichert geltende Aussagen zurückführen. Gesichert heißt hier allerdings nicht immer, daß diese Aussagen ihrerseits durch eine Deduktion erhalten worden sind. Unter Umständen entnehmen wir sie der Anschauung, die ein unverbildeter Mensch zu haben pflegt.

Betreibt man Geometrie in der beschriebenen Form, dann ergeben sich genug Beispiele, bei denen man sich im Begründen üben kann. Hierbei kommt es zunächst gar nicht so sehr darauf an, mit größter Exaktheit di Gedanken schriftlich zu fixieren; der Schüler wird erst auf einem sehr langen Weg lernen, solches zu tun. Deshalb halte ich es auch für sinnlos, den Schüler quasi als Leser mit exakten Formulierungen zu konfrontieren, deren Wert er u.U.noch gar nicht erkennen kann. So bin ich auf der Unterstufe bis zur Jahrgangsstufe 7 ein Verfechter sogenannter *Präbeweise* geworden, wie sie bei KIRSCH [1] beschrieben sind. Wie das Wort Präbeweis bereits andeutet, handelt es sich um eine Form des Begründens, die man vor dem eigentlichen Einstieg in das formale Beweisen pflegt, wobei aber bereits sehr deutlich der Kern der Beweisidee herausgestellt werden kann, und alle die für die Jahrgangsstufe unwesentlichen Details vorläufig außer acht bleiben. Der Lehrer ist aber auch beim Präbeweis verpflichtet, laufend das Niveau seiner Schüler anzuheben, was natürlich nicht heißen kann, daß z.B. ab Jahrgangsstufe 8 streng bewiesen wird, nur weil alle Lehrpläne vorschreiben, hier über das Beweisen zu philosophieren. Wie formal eine Beweisniederschrift ausfällt,hängt vom Einzelfall ab. Es muß hierzu Interesse vorhanden sein, es müssen auch die Möglichkeiten hierzu vorhanden sein und schließlich muß sich das Verfahren auch lohnen.

Wenn man aus pädagogischen Gründen Axiomatik an der Schule ablehnt, und das halte ich für etwas sehr Naheliegendes und Gutes, dann kann die Schule, bis hin zur Reifeprüfung, unter Beweisen nur das Zurückführen auf das dem Schüler bereits Bekannte verstehen. Der begründende Text wird bei einem solchen Deduzieren immer exakter werden,und so aus dem Präbeweis letztlich ein Beweis werden.

Wie exakt ein Präbeweis sein kann, soll hier am Beispiel der folgenden Behauptung demonstriert werden:
Der Satz wird erst anschließend an die Begründung formuliert. Die Farben, Farbsäume u.a. sind in dem vorliegenden Druck nicht wiedergegeben.

Erinnere dich

Bei einer Achsenspiegelung steht die Verbindungsstrecke von Punkt zu Bildpunkt senkrecht auf der Achse und wird von dieser halbiert.

Damit können wir die Wirkungsweise einer Zweifachspiegelung $P \xmapsto{s_a} P_1 \xmapsto{s_b} P'$ an parallelen Achsen a und b erklären:
$[PP_1]$ und $[P_1P']$ liegen auf einem gemeinsamen Lot der Achsen a und b, also auch $[PP']$.
Für eine weitere Untersuchung sind verschiedene Lagen von P zu a und b zu unterscheiden. Dazu sei c die andere Parallele zu a im Abstand d(a, b).
Die Geraden a, b, c zerlegen die Zeichenebene in 6 Teilmengen M_1 bis M_6:

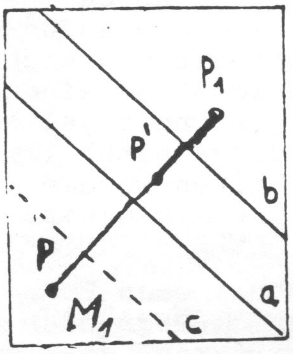


Abb.1 P aus M_1

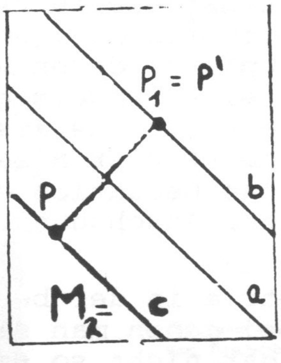


Abb.2 P aus M_2

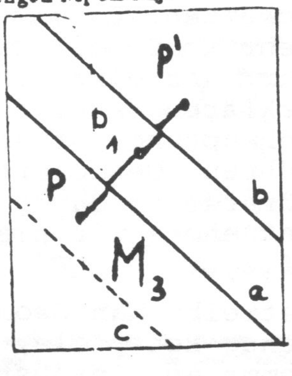


Abb.3 P aus M_3

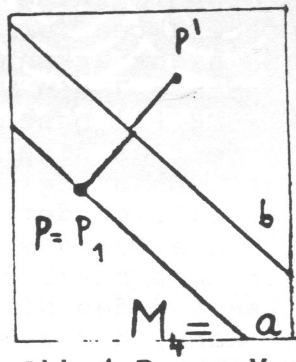


Abb.4 P aus M_4

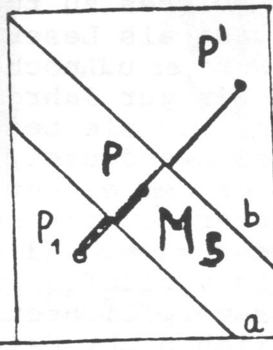


Abb.5 P aus M_5

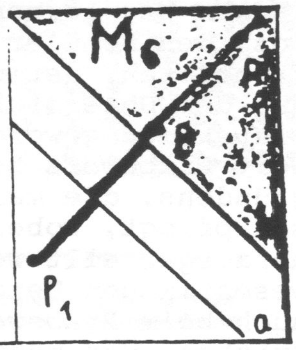


Abb.6 P aus M_6

Überprüfe

Die Zweifachspiegelung an a und b verläuft für alle Punkte aus M_1 analog wie in Abb. 1; entsprechendes gilt für M_2 bis M_6. Deshalb genügt es, die sechs genannten Fälle zu unterscheiden.

In jedem Fall zeigt der Pfeil $\overrightarrow{PP'}$ von a nach b. Hat der violette Farbsaum jeweils die Länge r und der blaue Farbsaum die Länge s, so gilt:

(1) $\boxed{d(a, b) = r - s \quad \text{und} \quad \overline{PP'} = 2r - 2s = 2(r - s) = 2 \cdot d(a, b)}$

(2) $\boxed{d(a, b) = r \quad \text{und} \quad \overline{PP'} = 2r = 2 \cdot d(a, b)}$

(3) $\boxed{d(a, b) = r + s \quad \text{und} \quad \overline{PP'} = 2r + 2s = 2(r + s) = 2 \cdot d(a, b)}$

(4) $\boxed{d(a, b) = s \quad \text{und} \quad \overline{PP'} = 2s = 2 \cdot d(a, b)}$

(5) $\boxed{d(a, b) = s - r \quad \text{und} \quad \overline{PP'} = 2s - 2r = 2(s - r) = 2 \cdot d(a, b)}$

(6) $\boxed{d(a, b) = s - r \quad \text{und} \quad \overline{PP'} = 2s - 2r = 2(s - r) = 2 \cdot d(a, b)}$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz

> Verbindet man bei einer Zweifachspiegelung an zueinander parallelen Achsen beliebige Punkte durch Pfeile mit den zugehörigen Bildpunkten, so gilt:
>
> Alle derartigen Pfeile sind gleich lang und zeigen in dieselbe Richtung.
>
> Ihre Länge ist gleich dem doppelten Abstand der beiden Achsen.
> Ihre Richtung steht senkrecht auf den Achsen; dabei zeigen die Pfeile von der ersten zur zweiten Achse.

Anschließend erkennen die Schüler, daß man sich mit dieser neuen Abbildungsvorschrift auch ein neues Problem eingehandelt hat: Kann man jede Verschiebung als Doppelspiegelung darstellen? Dies ist erneut ein weiterer Anlaß, sich eine Begründung zu überlegen.

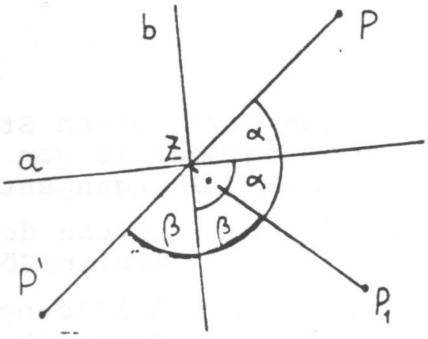
Wir haben gelegentlich in nicht symmetrischen Figuren Teilfiguren als symmetrische erkannt. So ist z.B. die Mittelsenkrechte zu einer Dreiecksseite Symmetrieachse. Läßt man nun in unterschiedlichen Dreiecken die drei Mittelsenkrechten von Schülern in Gruppenarbeit einzeichnen, so werden sich die Mittelsenkrechten durchaus nicht immer in einem Punkt schneiden. Es ist also die Frage zu klären, ob sich hier immer ein Schnittpunkt ergeben muß, ob es sich also bei den Zeichnungen um unvermeidbare Zeichenungenauigkeiten handelt. Dies ist ein weiterer Fall, bei dem wir lange vor der Jahrgangsstufe 8 einen Präbeweis führen können.

Abbildungsgeometrie führt häufig und schon sehr frühzeitig auf äquivalente Aussagen, deren Äquivalenz man zwar experimentell "durch Abbilden" überprüfen kann, wo aber Schüler am Ende der Jahrgangsstufe 7 doch schon so mißtrauisch sind, daß man die Äquivalenz begründen muß. Man denke hierbei z.B. an äquivalente Abbildungsvorschriften, wie sie weiter oben auseinandergesetzt wurden. Auch wenn wir hierbei soundso oft nur einen Präbeweis machen, scheue ich mich nicht, dies einen Beweis zu nennen, wenn die an diesem "Beweis" fehlenden Überlegungen, etwa Existenz von Z im nächsten Beispiel, für den Schüler nicht beweisrelevant sind. Frühere Mathematikergenerationen haben stets auch nur das bewiesen, was sie im Rahmen ihrer vorhandenen Theorie als Behauptung erkennen konnten.

Satz

> Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:
> (1) Eine Abbildung ist eine Punktspiegelung.
> (2) Eine Abbildung ist eine Zweifachspiegelung an senkrechten Geraden.

Beweis:
Wir beweisen zuerst, daß jede Zweifachspiegelung an senkrechten Geraden eine Punktspiegelung ist.
a und b sind zwei senkrechte Geraden, die sich in Z schneiden. Es ist $s_b \circ s_a(Z) = Z$. Dieser Schnittpunkt wird sich als Zentrum erweisen. Ein beliebiger Punkt $P \neq Z$ wird nacheinander an a und b auf P' gespiegelt (siehe Abbildung). Da symmetrisch gelegene Strecken bzw. Winkel gleich lang bzw. gleich groß sind, gilt:



(1) $\overline{PZ} = \overline{P_1Z} = \overline{P'Z}$, also $\overline{PZ} = \overline{P'Z}$

(2) $\sphericalangle PZP' = 2\alpha + 2\beta = 2 \cdot (\alpha + \beta) = 2 \cdot 90° = 180°$, also $\sphericalangle PZP' = 180°$

Letzteres ist gleichwertig damit, daß P' auf der Geraden PZ liegt. Da P' und P auf verschiedenen Seiten von a liegen, ist $P \neq P'$. Zusammenfassend wird jeder Punkt P genauso abgebildet wie bei der Punktspiegelung am Zentrum Z.
Mache dir anhand von Skizzen klar, daß unsere Überlegungen tatsächlich unabhängig von der Wahl des Punktes P sind (betrachte auch Punkte P auf a oder b).

Nun wird gezeigt, daß eine beliebige Punktspiegelung eine Zweifachspiegelung an senkrechten Achsen ist: Die Punktspiegelung ist eindeutig durch ihr Zentrum Z bestimmt. Wähle zwei Geraden a und b, die sich in Z senkrecht schneiden. Wie oben bewiesen, ist die Zweifachspiegelung $s_b \circ s_a$ gleich der Punktspiegelung an Z.

Dies alles kann man in einem Schülerbuch nicht schreiben; so ist eigentlich immer das Studium eines dazugehörigen Kommentarbandes erforderlich. Ich will dies am soeben gezeigten Beispiel auseinandersetzen: Damit der Schüler $s_b s_a(Z) = Z$ erkennt, soll er eben konkret an das entsprechende Abbilden denken; ist ihm dies nicht möglich, dann nehme er Transparentpapier und bilde ab! Analoges gilt für alle Abbildungsbeweise der Jahrgangsstufe 8, aber auch für die Kongruenzbeweise.

In der Jahrgangsstufe 8 werden dann vor allem zwei Beweisverfahren, der Kongruenzbeweis wie auch der eben beschriebene Symmetriebeweis, nebeneinandergestellt. Manchmal haben Lehrbücher den Eindruck erweckt, als würde es sich hierbei um gleichwertige Verfahren handeln. Auch wenn man eine Standpunktfrage hineinlesen könnte, möchte ich doch entschieden diese Gleichwertigkeit ablehnen. Es gibt typische Behauptungen, die mit einem Abbildungsbeweis rasch bewiesen sind. Es gibt aber auch typische Behauptungen, die nur mit größten Anstrengungen abbildungstheoretisch bewiesen werden können, weil es ihnen an Symmetrie fehlt. Andererseits kann man natürlich von einer gewissen Gleichwertigkeit beider Verfahren sprechen, wenn man daran denkt, daß kongruente Teilfiguren ja durch eine Mehrfachspiegelung zur Deckung gebracht werden können.

Die Fähigkeiten, die in Jahrgangsstufe 8 unsere Schüler im Beweisen erhalten, sind gering. Nur gelegentlich wagt ein Kollege, in einer Prüfungsarbeit einen Beweis zu verlangen.
Welche Fähigkeiten können wir aber vom Schüler erwarten? Einmal kann er lernen zu entscheiden, welche Beweisart bei einem konkret vorliegenden Beispiel die bequemere ist, weil sie z.B. zu einem kürzeren Beweis führ Darüber hinaus kann sein inneres Auge so geschult werden, daß er sich di mit dem Verfahren verbundenen Abbildungen vorstellen kann. In der hierzu erforderlichen, langen Einübungsphase sollte der Lehrer am Overheadprojektor, durch Ausschneiden usw. konkret die Abbildungen vorführen. Im Augenblick sieht es auch so aus, als könnte man in naher Zukunft für PCs software anbieten, deren Benutzeroberfläche ohne Aufwand Bewegungen von Teilfiguren ermöglicht. Auch das wäre ein sinnvoller Beitrag zur ITG.

<u>Literatur:</u>

Amtsblatt des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus Teil I: Sondernummer 15 vom 6.Mai 1977, Curricularer Lehrplan Mathematik für die 5. bis 8.Jahrgangsstufe des Gymnasiums

Bachmann, F. [1] : Aufbau der Geometrie an dem Spiegelungsbegriff, Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer

Bender, P. [1] : Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion, Zentralblatt f.Did. Math. Bd.14 (1982) Seite 9-24

Bieberbach, [1] : Theorie der geometrischen Konstruktionen, Basel:Birkhäuser 1952

Dembowski, P.[1] : Finite Geometries, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, Band 44, Berlin/Heidelberg/New York: Springer 1968

Herterich, K.[1] : Dreieckskonstruktionen, Stuttgart: Klett 1966

Kirsch, A. [1] : Beispiele für "prämathematische" Beweise, aus Beweisen im Mathematikunterricht Hrgb.: W.Dörfler und R.Fischer, Wien, Stuttgart: Hölder-Pichler-Tempsk und B.G.Teubner 1979 Seite 261-274

Klein, F. [1]: Vorlesungen über höhere Geometrie, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd.22, Berlin : Springer 1928 (Nachdruck 1968)

Meyer, Kh. [1]: Über das Miteinander von Abbildungs- und Figurengeometrie, Beiträge zum Mathematikunterricht 1982 Hannover, Schroedel Seite 81

Meyer Kh. [2] als Herausgeber zusammen mit anderen:
Brennpunkt Mathematik 5, Hannover: Schroedel 1988
Brennpunkt Geometrie 7, Hannover: Schroedel, ersch.
Brennpunkt Geometrie 8, Hannover: Schroedel, i.V.

Thomsen, G. [1]: Grundlagen der Elementargeometrie, Hamburger Mathematische Einzelschriften 15.Heft, 1933
B.G.Teubner, Leipzig 1933