M A T H E M A T I K I N F O R M A T I O N
GYMNASIUM STARNBERG
FACHBEREICH MATHEMATIK NR. 22
15. Juni 1987

Dr. Karlhorst Meyer

ANSCHAULICHE SPHÄRISCHE GEOMETRIE[1]

Im neuen bayerischen Lehrplan "Sphärische Trigonometrie" Jahrgangsstufe 11 [2] geht es um den Einsatz der in der Jahrgangsstufe 10 gewonnenen trigonometrischen Erkenntnisse auf der Oberfläche einer Kugel; bei genauerem Studium dieses Lehrplans hat man den Eindruck, daß es primär um die Geometrie der Kugel schlechthin und um die dazu gehörigen Anwendungen geht. Der Lehrplan spricht von der geometrischen Anschauung und betont die Analogien zwischen ebener Geometrie mit der auf der Kugel.
Nicht theoretisch, sonder praxisbezogen unter Einbeziehung der Anschauung soll gelehrt werden. Dies ist sehr erfreulich.

1. Lehrplan

1.1 Welchen Stellenwert hat das neue Fach im Gesamtcurriculum?

Neben der Sphärischen Trigonometrie stehen im Lehrplan gleichberechtigt die Alternativen Komplexe Zahlen, Kegelschnitte und Informatik, letztere nach dem Lehrplan der Jahrgangsstufe 10. Das sind viele, eigentlich zu viele Alternativen für das mathematisch-naturwissenschaftliche Gymnasium. Langfristig abprüfbar bleibt so nur das Fundamentum dieses Lehrplans, die Analysis, wenngleich einst (z.B. um 1950) abgesehen von der Informatik alles schon einmal verbindlich zum Lehrplan eines entsprechenden Gymnasiums gehörte. Die Ursache dafür, daß dies heute nicht mehr so ist, kann wohl zum Teil darin gesehen werden, daß das für Mathematik zur Verfügung stehende Gesamtstundenmaß einer laufenden Reduktion unterlag. Da weder in der Reifeprüfung noch durch den Respizienten kontrolliert werden kann, wieviel der oben genannten, durchaus nicht gleichwertigen Addita im Unterricht behandelt worden ist, zudem man sie ja auch am Schuljahresende, also in der schulaufgabenlosen Zeit lehren kann, wird es nach wie vor Kollegen geben, die davon kaum etwas zugunsten einer besseren Reifeprüfung unterrichten werden. Langfristig kann hier nur eine Reifeprüfungsaufgabe nach Wahl des Schülers helfen abzuprüfen, was vonden vielen Addita gelehrt wurde. Das heißt, der Stellenwert des neuen Faches ist im Augenblick klein, um so größer sollten unsere Anstrengungen sein, dieses Fach attraktiv zu machen. Dies kann zum Beispiel dadurch geschehen,daß gemäß der Lehrpläne im Rahmen der Addita ein zusammenhängender Kurs der folgenden Art gegeben wird: Jahrgangsstufe 10: Darstellende Geometrie, Jahrgangsstufe 11: Sphärische Trigonometrie, Kollegstufe 13: Grundkurs Astronomie. Es fragt sich dann allerdings, wo bleibt so die Informatik; es wäre sicher ungut, wenn sie wieder in den Wahlunterricht zurückgedrängt würde. Die Angelegenheit ist also durchaus noch nicht zu Ende diskutiert. Es wäre aber zu begrüßen, wenn das Interesse der Lehrer an Sphärischer Trigonometrie dazu führen würde, auf einer solchen Basis die Diskussion weiter zu führen.

---

[1] Vortrag der Schroedel-Schulbuchverlag GmbH in Zusammenarbeit mit dem Pädagogischen Institut der Landeshauptstadt München am 25.6.87

[2] zweite Auflage

1.2 Was versteht der Lehrplan unter Anschauung (übergeordnetes Lernziel

Die folgende Lernzielliste bleibt sicher unvollständig, auch deshalb, weil ich im Hauptteil des Vortrags genügend Zeit haben möchte, um auf inhaltliche Dinge des Unterrichts eingehen zu können.

1.2.1 Der Schüler soll ein Gefühl für Geometrie auf der Kugel bekommen. Er soll die Fähigkeit erhalten, aus seiner räumlichen Anschauung heraus so weit Zusammenhänge und Vermutungen herzustellen, daß er diese mit einer Formelsammlung präzisieren kann.
Beispiel: Seine Anschauung sollte so geschult sein, daß er in der Lage ist, ein Kugelproblem im Zusammenhang mit einem rechtwinkeligen, sphärischen Dreieck zu bringen, wozu er allerdings einige Definitionen beherrschen muß, um dann sein "Wissen" einzusetzen, daß es die NEPERsche Regel gibt, die man in der Formelsammlung findet. Dieses bedeutet nicht, daß der Unterricht darauf verzichten könnte, wenigstens wichtige Teile dieser Regel theoretisch herzuleiten; da dies jedoch auf sehr speziellen Beweisideen beruht, kann man nicht erwarten, daß diese der Normalschüler langfristig beherrscht.

1.2.2 Räumliche Anschauung zu erhalten, verlangt ein vieljähriges Bemühen um sie. Nicht umsonst spricht der Lehrplan auf Seite 108 von der Weiterentwicklung "des räumlichen Vorstellungsvermögens des Schülers". Wir müssen allerdings zugeben, daß zwar der bayerische Lehrplan die Entstehung eines räumlichen Vorstellungsvermögens vorsieht, dieses aber kaum bei den derzeit in Bayern eingeführten Lehrbüchern realisiert werden kann. Gestatten Sie mir hierzu einige detaillierte Bemerkungen, die zeigen, daß wir uns zukünftig mehr als bisher lehrplankonform bemühen müssen, Wert auf die Pflege der räumlichen Geometrie zu legen, um damit der genannten Aufforderung gerecht zu werden:

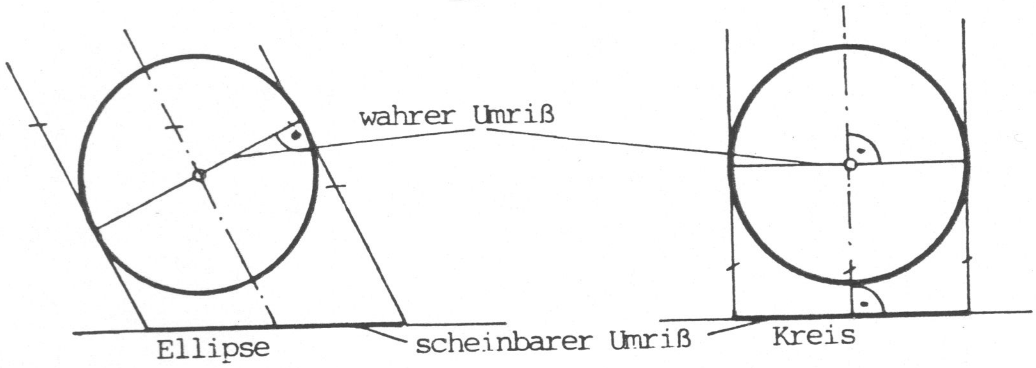
33% Geometrie sieht der Lehrplan der Jahrgangsstufe 5 vor; berücksichtigt man, daß geometrische Zeichnungen in einem Lehrbuch sehr platzraubend sind, so heißt das, 40% eines Mathematikbuches 5 müssen Geometrie sein. Diese Forderung erfüllt derzeit kein in Bayern zugelassenes gymnasiales Mathematiklehrbuch. Ein nicht unwesentlicher Teil dieser Geometrie kann räumliche Geometrie sein. PIAGET äußerte einmal, daß das Kind topologische Zusammenhänge des Raums lange vor der eigentlichen geometrischen Struktur erfaßt. Diese Äußerung wurde lange Zeit fälschlicherweise auf 10-jährige Schüler angewandt. Dies war wohl der Grund, weshalb vor allem in norddeutschen Lehrbüchern für die Jahrgangsstufe 5 Knoten und topologische Zusammenhangsfragen eindrangen. PIAGET sprach aber nicht von 10-Jährigen in diesem Zusammenhang sondern von Kleinkindern. 10-Jährige stehen mitten im Bastelalter, haben also häufig die besten Ansätze für räumliches Vorstellungsvermögen, das wir nutzen sollten und nicht verkümmern lassen dürfen. Ein Dreijähriger dagegen läuft um den Tisch und stellt fest, daß er wieder zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrt, was kümmert ihn, daß der Tisch ein Rechteck als Platte hat. Er ist in der topologischen Entwicklungsphase, die der 10-Jährige längst hinter sich gelassen hat.

Sicher, in der Jahrgangsstufe 6 zeigt der bayerische Lehrplan wenig Geometrie. Ein Lehrer ist allerdings verpflichtet, im Unterricht dafür Sorge zu tragen, daß einmal vom Schüler erworbenes Wissen erhalten, gepflegt und vertieft wird, auch wenn der Lehrplan dies nicht eigens betont. Dafür hat der Mathematikunterricht 75% Unterrichtszeit zum Üben wo jederzeit "alter Stoff" z.B. der Geometrie wiederholt und ausgebaut werden kann.

Die Jahrgangsstufen 7 und 8 bringen in erster Linie ebene Geometrie. Der Lehrplan verbietet aber nirgends, daß Sie die ebene Geometrie nicht auch räumlich anwenden dürfen. Sie sehen, wie wenig eingeführte Lehrbücher unsere Belange berücksichtigen.

In den Jahrgangsstufen 8 und 9 kommt dann jeweils am Ende des Schuljahres räumliche Geometrie. Auch wenn der eine oder andere Kollege Vorschläge gemacht hat, dies zu vermeiden, werden auch zukünftige Lehrbücher nicht umhinkommen, den üblichen Aufbau hier zu praktizieren Dies braucht aber nicht dazu führen, daß bei Zeitnot einfach am Schuljahresende die räumliche Geometrie fehlt. BRENNPUNKT [3] wird in seinen Kommentarbänden ausführliche Vorschläge dem Lehrer zur Verfügung stellen, die zeigen, wie er verlorene Unterrichtszeit wieder sinnvoll einholen kann.

Der bayerische Lehrplan sieht also genügend Unterrichtszeit für die Entwicklung des Raumanschauungsvermögens unserer Schüler vor. Wir sollten allerdings nicht vergessen, Raumanschauung im Unterricht laufend zu pflegen. Einealte Erfahrung der Geometer zeigt, daß das Bastel von Modellen hierzu nicht ausreicht. Raumanschauung hat man nur, wenn man in der Lage ist, den Raum in der Ebene darzustellen. Dieser Transferschritt ist die beste Unterrichtskontrolle. Hierzu bietet sich in Bayern vor allem die Schrägbildmethode an, die allerdings für die Erfordernisse der Sphärischen Geometrie nicht ausreichend ist, weil sie i.a. den Kugelumriß, eben das, was man im Bild von der Kugel sieht, zu einer Ellipse verzerrt. Das bedeutet, will man den Kugelumriß als Kreis sehen, so muß man den die Kugel berührenden Rotationsprojektions zylinder mit der Bildebene senkrecht schneiden, also sogenannte Orthogonalprojektion wählen (siehe die folgenden Abbildungen):



Schrägriß Orthogonalriß
einer Kugel

Dies alles ist im Unterricht ohne Darstellende Geometrie möglich; schon ab Jahrgangsstufe 5 kann man in natürlicher Form, ohne zusätzliche Belastung der Schüler durch integrierendes Lernen Orthogonalrisse benutzen (siehe BRENNPUNKT 5 [3]).

1.2.3 Der Lehrplan spricht von <u>Analogien</u> zwischen Ebene und Kugel undnennt hiermit ein wichtiges Verfahren mathematischer Forschung. Beispiel: Der Sinussatz ist aus der ebenen Geometrie bekannt. Man stellt die Frage: Kann der Satz auf der Kugel seine Gültigkeit haben? Die Anschauung liefert die Übertragung der Beweisidee der Ebene auf die Kugel. Aufgabe der Beweisdarstellung ist es hierbei, die Analogie zwischen diesen beiden Geometrien deutlich werden zu lassen, d.h. wirklich beide Beweise nebeneinander zu schreiben (leider fehlt dies in [1] Seite 43 , auch an anderer Stelle). Selbstverständlich sind solche Analogien nicht, denn sonst wären ja Kugel und Ebene das gleiche. Man kann auch ohne große Mühen sofort Unterschiede finden, wenn man die Großkreise als Analoga der Geraden betrachtet: Auf der Kugel gibt es keine Parallelen. Das Lote-errichten ist zwar eindeutig, aber nicht das Fällen.
ZEITLER war wohl einer der ersten, der in diesem Zusammenhang schon

in den 60iger Jahren vom"Verfremden"sprach, wobei er an die Suche nach allgemeineren oder auch nur spezielleren Strukturen dachte. In unserem Fall führt der Weg von der Ebene über die Kugelgeometrie zur absoluten Geometrie, in der der Sinussatz auch noch gilt. Das Prinzip des Verfremdens kommt beim Schüler zum Tragen, wenn wir ihm den Mut geben, mit Mathematischem zu experimentieren. Sphärische Trigonometrie nach "bayerischer Art" gibt hierzu viel Gelegenheit.
Kenntnisse, die Fähigkeit zum Analogisieren und der Mut zum Experimentieren führen erst zu Beweisideen und zu Lösungsstrategien.

Lernziele sind Endziele; wir haben sie vor Augen und wissen nicht, wie wir sie erreichen sollen; sie helfen uns Lehrern bei unserer täglichen Arbeit (Vorbereitungsarbeit) deshalb nur wenig. Für den Lehrer sind die Stationen, auf denen man die Lernziele erreicht, wichtiger als diese selbst. Leider werden solche Zwischenstationen nur selten ausformuliert. Deshalb scheinen die Ziele des Lehrers und deren Realisierung mehr Bedeutung als Lernziele zu haben:

2. Lehrziele und ihre Realisierung

2.1 Erziehung zur Raumanschauung

2.1.1 Wie bereits betont wurde, besteht eine erste Stufe dieser Erziehung im Basteln. Man kann an geeigneten räumlichen Modellen die Begebenheiten studieren. Dies reicht aber für den Schüler nicht aus, da er ja Unterrichtsprotokolle, aber auch Ideen in Prüfungen, Hausaufgaben u.a. schriftlich fixieren soll. Deshalb muß er lernen, räumliche Begebenheiten in der Ebene darzustellen. Dazu muß ihm aber auch etwas gelehrt werden. Die Methodik sollte man hierbei dort hernehmen, wo derzeit die größte einschlägige Erfahrung vorhanden ist, der Ingenieurausbildung. Hinsichtlich der Sphärischen Trigonometrie kann man dem Schüler die Arbeit erleichtern, wenn man ihm einige Bezüge Raum-Ebene beibringt. Ob der Schüler alle folgenden Punkte braucht, mögen Sie selbst entscheiden, der Lehrer sollte sie beherrschen. Alle diese Punkte ergeben sich aus der Raumanschauung in natürlicher Weise und benötigen zum Verständnis in der Regel keine weiteren Begründungen.

Definition: Die Gesamtheit aller Punkte, die im Raum von einem festen Punkt (genannt Mittelpunkt) konstanten Abstand (genannt Radius) haben, heißt Kugel.
Die Gesamtheit aller Punkte, die im Raum von einem festen Punkt P konstanten Abstand haben und in einer Ebene liegen, heißt Kreis.
Man beachte, im allgemeinen sind P und der Mittelpunkt des Kreises, bzw. der Abstand und der Radius verschieden!

Folgerungen: (1) Jeder ebene Schnitt einer Kugel ist ein Kreis.
(2) Jeder ebene Schnitt eines Rotationskegels senkrecht zur Achse ist ein Kreis.
(3) Die Kugel ist rotationssymmetrisch zu jeder Achse durch ihren Mittelpunkt.
(4) Der Kreis ist rotationssymmetrisch zum Mittelpunktslot.
(5) Die Kugel entsteht durch Rotation eines Kreises um einen seiner Durchmesser.
(6) Das Kugelbild bei Parallelprojektion entsteht durch einen Rotationszylinder, der längs eines Großkreises (genannt wahrer Umriß) die Kugel berührt. Der Schnitt dieses Zylinders mit der Bildebene heißt scheinbarer Umriß oder Bild der Kugel.
(7) Es gibt Kleinkreise auf der Kugel.
(8) Ein Kreis im Raum ist festgelegt durch Mittelpunkt, Mittelpunktlot (oder Ebene) und Radius.

Definition: Bei Parallelprojektion heißt das Bild eines Kreises Ellipse

Sätze: (9) Bei Parallelprojektion werden parallele Strecken im selben Verhältnis verzerrt (sogenannter räumlicher Vierstreckensatz).

(10) Bei Orthogonalprojektion werden die Strecken auf einer Höhenlinie unverkürzt abgebildet. Die zu den Höhen in der Ebene senkrechten Strecken (also längs Fallinien) werden am stärksten verkürzt.

(11) Zu jeder Ebene (und damit zu jedem Kreis) gibt es Projektionsrichtungen (nämlich parallel zur Ebene), die die Ebene auf eine Gerade abbilden; in dieser Lage heißt die Ebene in projizierender Lage.

(12) Zwei Ebenen können stets so projiziert werden, daß beide Ebenen in projizierender Lage sind (Projektionsrichtung ist dann paralle zur Schnittgeraden).

Folgerungen aus obiger Definition:

(13) Jede Ellipse hat zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieachsen, die die sogenannten Halbachsen a,b tragen.

(14) Hieraus folgt die sogenannte Affinitätskonstruktion der Ellipse und die Aufstellung der Ellipsengleichung aus der wiederum aus der Abstandsformel die sogenannte Gärtnerkonstruktion folgt.

Die Scheitelkreiskonstruktion sollte mitgeteilt werden, da man mit ihr und einem weiteren Punkt die meisten Ellipsen mit hoher Genauigkeit zeichnen kann. Ein Beweis kann allerdings erst am Ende der Jahrgangsstufe 11 im Rahmen der Analysis gebracht werden.

Die Schüler zeichnen einige Ellipsen aus den Halbachsen, konstruieren auch orthogonale Kreisbilder und kontrollieren ihre Ergebnisse jeweils Zu jeder Ellipse gibt es eine Blickrichtung, in der die Ellipse wieder als Kreis erscheint (Manche Lehrbücher halten einer solchen Prüfung nicht stand!).

Man braucht aber für das Verständnis der Sphärischen Trigonometrie weitere Kenntnisse, insbesondere dann, wenn wir etwa die Figur zur Herleitung der NEPERschen Regel (siehe 3.1) zeichnen wollen. Die folgenden weiteren Punkte sind nur hinsichtlich einer mathematischen Ordnung und nicht hinsichtlich eines Curriculums zusammengestellt.

(15) Bilder paralleler Geraden sind parallele Geraden; insbesondere sind Winkel an parallelen Geraden auch im Bild gleich (Doppelkreuzung!), wenngleich sie i.a. verzerrt wiedergegeben werden.

Eine Definition des Winkels zweier sich schneidender Ebenen kann nicht ohne weiteres gegeben werden, da man experimentell überprüfen kann, daß viele Winkel zwischen zwei Ebenen passen. Deshalb ist eine Normierung erforderlich:

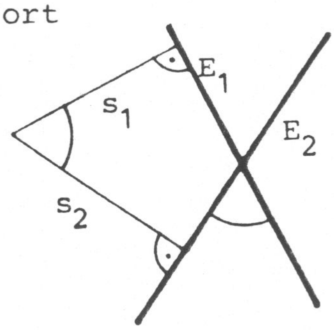
Definition: l_i sei auf $E_1 \cap E_2$ in E_i das Lot. Dann definiert man:
$\alpha = \sphericalangle(E_1, E_2) :\!= \sphericalangle(l_1, l_2)$

Hieraus folgt dann, nicht umgekehrt (!):

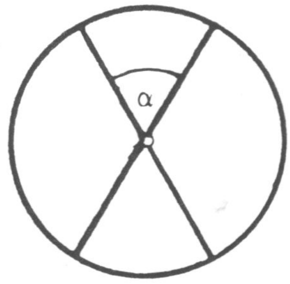
Folgerung: (16) Sind s_i beliebige Lote auf E_i, so gilt
$\sphericalangle(E_1, E_2) = \sphericalangle(s_1, s_2)$.

Hierzu muß man allerdings wissen, daß der Winkel zwischen windschiefen Geraden durch Parallelverschieben zu sich schneidenden Geraden definiert wird.

Die Anschauung und einiges Wissen liefert sofort die Begründung zu (16):
Man kann beide Ebenen projizierend betrachten; dann sind die Lote von einem Punkt (o.B.d.A.) aus unverkürzt, also wird ihr rechter Winkel zur Ebene jeweils unverzerrt wiedergegeben. (16) folgt dann unmittelbar aus einem Satz der Jahrgangsstufe 7.
Als Winkel nimmt man jeweils den kleineren.



(17) Der Winkel zwischen zwei Großkreisebenen der Kugel ist gleich dem Winkel ihrer Tangenten jeweils in einem Schnittpunkt.

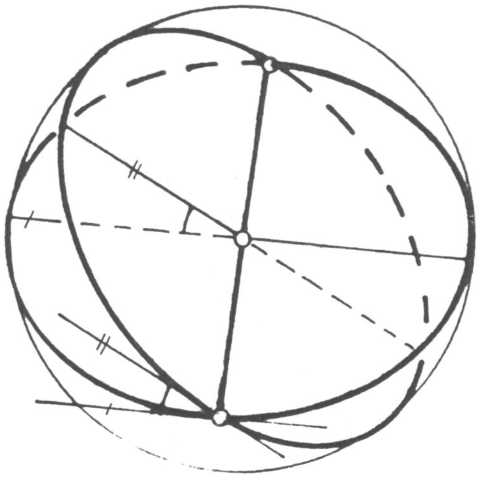


Die Begründung ist leicht: Die Tangenten stehen auf der Schnittgeraden senkrecht.

Will man dies in Orthogonalprojektion so sehen, daß die Kreise sich als Ellipsen darstellen, so kann man wie folgt vorgehen:

a) Wähle die Hauptscheitel A_i, B_i beliebig auf dem Kugelumriß.

b) Wähle die Nebenscheitel C_i, D_i beliebig auf Mittelsenkrechten zu A_iB_i innerhalb des Kugelumrisses. Damit stehen die Neigungen gegenüber der Zeichenebene fest.



c) Die Ellipsenschnittpunkte lassen sich zwar noch aus den gegebenen Stücken mit Zirkel und Lineal konstruieren, doch führt dies über die Erfordernisse eines Gymnasiums hinaus; deshalb muß auch hier die Anschauung und das oben erworbene Wissen weiterhelfen, um vernünftige Skizzen zu bekommen:

d) Das Auge legt mit großer Genauigkeit an die gezeichneten Ellipsen im Schnittpunkt die Tangenten.

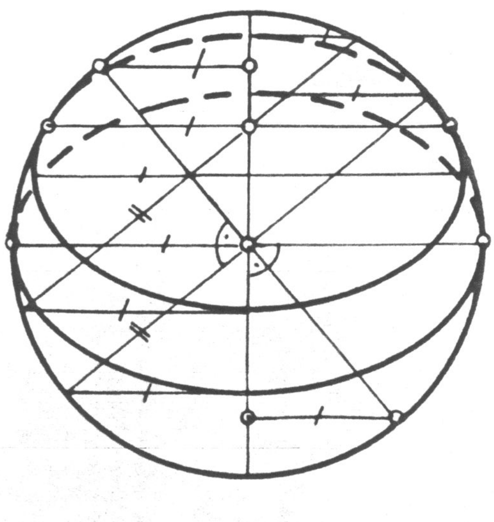
e) Dann zeichnen wir hierzu parallele Schenkel in M.

2.1.2 Manchmal braucht man Kleinkreise. Auch hierzu muß man einiges Wissen haben:

(18) Die Bilder paralleler Kreisschnitte einer Kugel sind ähnliche Ellipsen (Warum?).

(19) Die Bilder von Großkreisen berühren den Kugelumriß stets in Hauptscheiteln. Die Kleinkreise berühren den Kugelumriß nie in den Hauptscheiteln, man kann die Umrißberührpunkte der Kleinkreise wie folgt konstruieren:

a) Gibt man bei Orthogonalprojektion den Kugelumriß mit einem Großkreisbild (Äquatorbild) vor, so kann man zunächst über eine Umklappung die zum Äquatorkreis gehörigen Pole in ihren Bildern konstruieren. Diese Umklappung bekommt man dann, wenn der Äquator projizierend wird.



b) In dieser Lage kann man dann den gewünschten Breitenkreis (Kleinkreis) einzeichnen und wieder zurückklappen.

c) Der Breitenkreisteil vor den Umrißberührpunkten ist dann sichtbar.

Abgesehen von der sehr speziellen Konstruktionsaufgabe 2.1.2 kann alles im Rahmen des normalen Geometrieunterrichts von 5 bis 10 unterrichtet werden, wie BRENNPUNKT zeigen wird. Das alles muß nichts mit Darstellender Geometrie zu tun haben, wo es dann nicht nur ums Skizzieren der Zusammenhänge gehen würde, sondern um deren genaue Konstruktion. Sicher würde 2.1.1 durch Darstellende Geometrie in 10 vertieft; aber das muß nicht so sein. Dann allerdings sollte man zu Beginn der Sphärischen Geometrie berücksichtigen, daß einige Probleme wie 2.1.2 noch nachgeholt werden müssen. Die sicher in [1] sehr gut gemeinte Idee der Ellipsenschablonen reicht hierzu nicht aus.

Hier sollte der Lehrer sich auch die Medienfrage stellen. Immer schöne Folien benutzen und gute Arbeitsblätter hierzu auszuteilen, ist sicher einseitig und zeigt dem Schüler vor allem nicht das für ihn so wichtige Entstehen der Zeichnungen. Comic strips, wie Ihnen eben vorgeführt, sind da schon besser, aber eindeutig zu aufwendig in der Lehrerarbeitszeit. Das Vorzeichnen durch den Lehrer im Overhead projektor, wie heute leider praktiziert, ist meist technisch schlecht. Probieren Sie es doch einmal mit dem guten alten Tafelzeichnen. Es ist billig, umweltfreundlich. Der Schüler hat außerdem noch die Möglichkeit, einfach durch Auszählen der Karokästchen Ihr Bild in sein Heft zu übertragen. Außerdem ist erfahrungsgemäß Abzeichnen der erste Schritt zum Erlangen von räumlicher Anschauung.

Weitere Lehrziele müssen Sie allerdings ausbauen, die ich nur kurz erwähnen kann:

2.2 Erziehen zum Analogisieren und Experimentieren

Aus Zeitgründen kann ich nur eine Bemerkung hierzu bringen:

(20) In einem sphärischen Dreieck gilt für die Winkelsumme
$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 900^\circ$.

Will man dies einsehen, so experimentiert man mit sphärischen Dreiecken auf einer Kugel; man zeichnet z.B. mit einem Plastikschreiber auf einen Gummiball: Man bildet mit einem Bogen des "Äquators" ein sphärisches Dreieck mit zwei hierzu senkrechten "Meridiankreisen", die fast einen 360°-Winkel im "Nordpol" einschließen; dann hat das Dreieck eine Innenwinkelsumme von fast 540°. Mit weiteren Experimenten mit dem Ball kann man einsehen, weshalb 900° die obere Grenze ist. In einem Lehrbuch sollte man eigentlich für eine solch auffällige Sache einen Beweis niederschreiben. Dies geht natürlich elegant, wenn man die sphärische Projektion zur Verfügung hat: Man erhält in der Bildebene ein aus drei Kreisbögen gebildetes Dreieck; verbindet man die Ecken durch Strecken, so erhält man ein Dreieck, dessen Innenwinkelsumme offenbar kleiner ist; damit hat man die untere Grenze der Ungleichung gefunden. Da aber das äußere dieser Zeichnung auch das Bild eines sphärischen Dreiecks ist, erhält man durch eine einfache Subtraktion auch die obere Grenze obiger Ungleichung.

2.3 Erziehen zum Mathematisieren

Der Stellenwert der Anwendung für die Mathematik und deren Weiterentwicklung ist heute unumstritten. Auch liegt der Verdacht nahe, daß es beim Lehrplan über Sphärische Trigonometrie die Anwendungen waren, die dieses Fach wieder Schulfach in Bayern werden ließen. Allerdings kann der Lehrer nicht zaubern, wenn es darum geht, gute Anwendungen in seinen Unterricht einfließen zu lassen. Dies gilt auch für Schulbuchautoren. Wenn man schon (vergl. [1] Seite 63) erwähnen möchte, daß Schiffe und Flugzeuge auf langen Strecken aus Ersparnisgründen den kürzesten Weg fahren müssen, also auf einer sogenannten Geodätischen, auf einem Großkreis, sich bewegen müssen und nicht nach Kompaß auf einer sogenannten Loxodromen bewegen, dann darf man natürlich nicht nur davon schreiben, daß der Kompaß laufende Kursänderungen erfordert, um auf dem Großkreis zu bleiben und daß der Großkreis deshalb nur durch Streckenzüge längs vieler Loxodromen angenähert wird, sondern muß zugeb daß moderne Fahrzeuge deshalb automatische Steuerungen haben, die gestatten, daß das Fahrzeug sich stetig längs eines Großkreises bewegt, j sogar Windabdrift und Strömungen ausgeglichen werden.

Sicher sind noch weitere Lehrziele zu nennen, die alle realisiert werden können, wenn entsprechend vorgebildete Lehrer vorhanden sind. Wenig Unterstützung wird der Lehrer im allgemeinen von den eingeführten Lehrbüchern zu erwarten haben.

3. Zwei Bemerkungen zu den Kernstücken

3.1 Zur Herleitung des sphärischen Winkelsinus braucht man ein rechtwinkliges, sphärisches, spitzwinkeliges Dreieck samt Dreikant. Das heiß in einer Ecke C schneiden sich zwei Großkreise senkrecht, d.h. ein Kugelradius und zwei Kugeltangenten stehen paarweise aufeinander senkrecht.

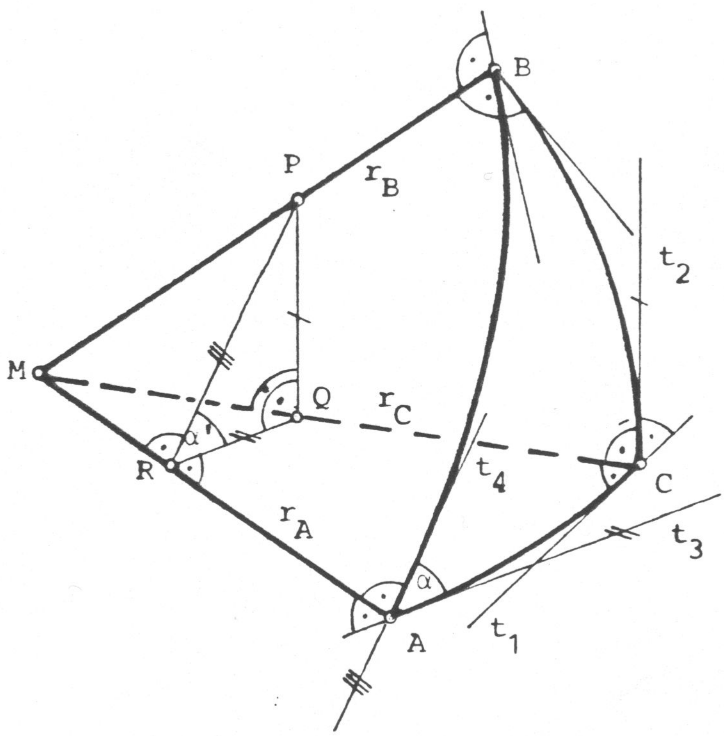
Schüler sollen eine entsprechende Abbildung von der Tafel abzeichnen. Wie skizziert man nun eine solche Zeichnung, um selbst möglichst wenige Fehler zu machen und darüber hinaus die Schüler zu keinem Fehler zu verleiten

a) Man beginnt mit dem eben beschriebenen orthogonalen Dreibein t_1, t_2, r_C.

b) Man legt den Kugelmittelpunkt M fest und skizziert die drei Großkreisbögen, beachtet aber, daß die Radien r_A und r_B ebenfalls auf den Kreisbögen senkrecht stehen.

c) Zur anschließenden Überlegung braucht man das Lot PQ auf r_C in der von r_C und r_B aufgespannten Ebene, d.h. eine Parallele zu t_2.

d) Durch PQ legt man eine Lotebene zu r_A (Hierzu muß dem Schüler vorher so viel Anschauung beigebracht werden, daß er weiß, daß es so etwas gibt!). In der Praxis bekommt man R dadurch, daß man weiß: QR ist parallel zu t_3 und PR ist parallel zu t_4. Dann sieht man auch, daß $\alpha' = \alpha$ ist.

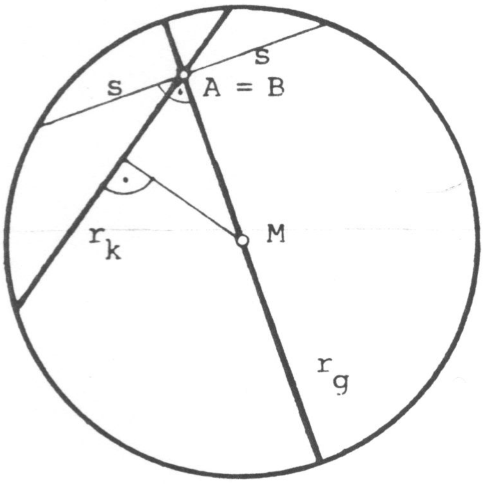


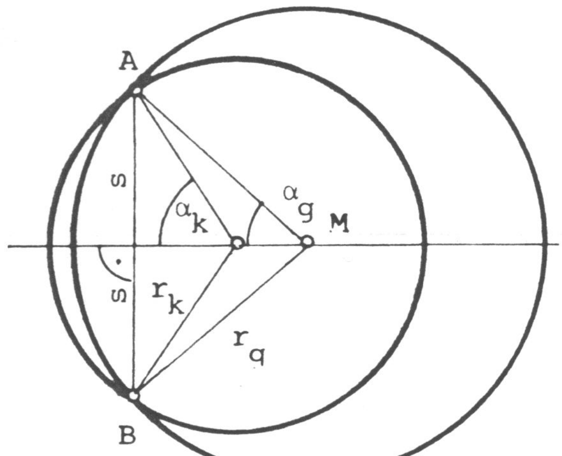
Die hier vorgelegte Zeichnung ist nach diesem Verfahren gezeichnet, sie ist nicht konstruiert und damit im Sinne einer Orthogonalprojektion falsch; sie stimmt allerdings ungefähr unter den Aspekten einer Parallelprojektion (vergl. hierzu auch [1] Seite 32).

3.2 Weshalb ist der Bogen längs eines Großkreises der kürzeste, also der Großkreis die <u>Geodätische</u> auf der Kugel? Dies ist eindeutig eine differentialgeometrische Frage, die wir sicher am Gymnasium nicht umfassend lösen können. Aber, was den Spezialfall Kugel anbelangt, können wir diese Frage fast "exakt" beantworten, zumindest aber eine plausible Antwort geben. Die Klärung dieser Frage scheint mir hinsichtlich der im Lehrplan geforderten Anwendungen unerläßlich.

Der Lehrplan empfiehlt die Geodätische einer konvexen Fläche durch das Spannen eines Fadens zu definieren. Das bleibt krückenhaft, weil zwar der Schüler mit einigem guten Willen sicher bereit ist zu glauben, daß sein auf einer Kugel gespannter Faden längs eines Großkreises verläuft, begründen können wir dies allerdings wegen der hierzu fehlenden Physik kaum. D.h. in einem Spezialfall kann dies der Schüler einsehen: Hängt man einen Faden an den Nordpol einer Kugel bis zum Äquator und hängt dort an ihn ein Gewicht, so zieht das Gewicht in der Richtung NS und der Faden legt sich in die Ebene aus Nordpol und der Richtung NS, die sicher den Kugelmittelpunkt enthält; also ist der Faden in einer Großkreisebene.

Wir können allerdings einen anderen, geometrisch exakten Weg gehen:





Vergleichen wir zwischen zwei Kugelpunkten A,B den Weg längs eines Großkreises mit dem längs eines Kleinkreises und bringen die beiden Kreisebenen in projizierende Lage (linke Zeichnung), dann haben die beiden Kreise, deren Radien wir jetzt sehen können, die Kugelsehne $\overline{AB}$ gemeinsam. Das Problem ist also auf die rechte Zeichnung zurückgeführt.

Unsere Frage lautet also: Weshalb gilt

$\widehat{AB}_k = \frac{2\alpha_k}{2\pi} \cdot 2\pi r_k > \frac{2\alpha_g}{2\pi} \cdot 2\pi r_g = \widehat{AB}_g$? Hierbei steht laufend g für Großkreis und k für Kleinkreis. Wir setzen $|\overline{AB}| = 2s$, dann gilt $\sin\alpha_k = \frac{s}{r_k}$ und $\sin\alpha_g = \frac{s}{r_g}$. Unsere Frage ist damit gleichwertig mit der Frage: Weshalb ist

$$r_k \cdot \arcsin\frac{s}{r_k} > r_g \cdot \arcsin\frac{s}{r_g} \quad \text{für alle } s < r_k < r_g?$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Formel für s = 1 auf einem Taschenrechner nachprüfen. Es sollte uns hierbei nicht stören, daß die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen in der Jahrgangsstufe 11 noch nicht untersucht sind. Doch haben die Schüler zu diesem Zeitpunkt längst erkannt, daß man auf dem Taschenrechner Funktionen leicht umkehren kann. Dieses Beispiel zeigt auch deutlich, daß die Kurvendiskussion der Analysis unumgänglich ist.

Resumée

Die Aufbereitung der guten Ideen im Lehrplan Sphärische Trigonometrie ist sicher noch lange nicht abgeschlossen. Die Lehrbuchliteratur zeigt noch keine befriedigende Lösung. Man sollte aus dieser Situation die Lehre ziehen, nicht allzuschnell nach Erscheinen eines Lehrplans Lehrbücher auf den Markt zu bringen. Eines steht schon heute fest, daß nur eine ausgedehnte, allgemeine Lehrerfortbildung in der Lage sein wird, bestehende Lücken zu schließen; meine Vortragszeit war hierzu sicher zu wenig. Trotzdem sollten Sie nicht jetzt so reagieren, daß Sie sich auf Warteposition zurückziehen, bis all die offenen Fragen gelöst sind. Denn ich kann Ihnen nur versichern, es macht richtig Spaß, in einem neuen Gebiet zu experimentieren. Eines sollte sich nicht wiederholen, daß zu wenige dieses Additum in Zukunft wählen und es dann nach einiger Zeit wieder aus dem Lehrplan mit der Begründung gestrichen wird, daß kaum eine Schule dieses Fach gewählt hat.

Literatur

[1] Kern, Rung: sphärische trigonometrie, bsv München 1986

[2] Amtsblatt des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus: Teil I: Lehrplan Mathematik für die Jahrgangsstufe 11 der Gymnasien, Sondernummer 5 Jahrgang 1984.

[3] Brennpunkt Mathematik 5 für Gymnasien in Bayern, Schroedel-Schulbuchverlag Hannover 1987

Anschrift:

Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
8014 Neubiberg