Heimo Gnilka

Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Am vorletzten Tag des diesjährigen Erlanger Mathematikseminars hatten die anwesenden Schüler die Gelegenheit, einen Lerninhalt nachzuholen, der zum Bedauern der überwiegenden Mehrheit der Mathematikkollegen aus dem Lehrplan gestrichen wurde.

Wohl jeder Schüler oder Jungstudent – der mathematischorientierten Studienzweige geht mit gemischten Gefühlen an die Arbeit, wenn ein Beweis angefertigt werden soll. Und das aus gutem Grund: es gibt eben <u>kein</u> Beweisverfahren, mit dem auch nur ein einziger Beweis nach Schema ausgeführt werden könnte.

Wir unterscheiden im wesentlichen drei Beweisformen:

(i) der direkte Beweis: ausgehend von der Voraussetzung ist durch logische Schlußfolge die Behauptung zu zeigen.

(ii) der indirekte Beweis: man bildet von der Behauptung das logische Gegenteil und führt diese Annahme durch logische Schlußfolge zu einem Widerspruch.

Bei beiden Beweisverfahren ist der Beweisführende auf sein Wissen, seinen Intellekt und seine Phantasie angewiesen.
Ein Standardkonzept gibt es keines.
Der Idealvorstellung eines Beweisschemas am nächsten kommt das

(iii) Beweisverfahren der vollständigen Induktion:

Sei $A(n)$ eine von der natürlichen Zahl n abhängige Aussage.
Wenn gilt
1. $A(n_o)$ ist wahr (Induktionsanfang, $n_o \in \mathbb{N}$)
2. für beliebiges $n \geq n_o$ gilt:
Falls $A(n)$ wahr ist, (Induktionsvoraussetzg)
dann ist auch $A(n+1)$ wahr. (Ind.schritt von $n \to n+1$)

dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \geq n_o$.

Oft ist $n_o = 1$.
Damit sind zwar nicht alle Aussagen beweisbar, sondern nur die, die von der natürlichen Zahl n abhängen - aber das sind eine ganze Menge.

Ich erläutere das Verfahren an folgendem Beispiel:

Es soll gezeigt werden: $\underline{A(n)}$: Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n beträgt $\frac{1}{2}n(n+1)$.

kurz: $A(n)$: $1 + 2 + 3 + \ldots + n =: \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 1)

Beweis mit vollstäniger Induktion:

Ind.anfang: $n = 1$

$\text{l.S.} = \sum_{k=1}^{1} k = 1$

$\text{r.S.} = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ $\quad$ l.S. = r.S.

d.h. $A(1)$ ist wahr.

Ind.voraussetzumg (Ind.annahme):

$A(n)$ ist wahr

d.h. es gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

Behauptung: $A(n+1)$ ist wahr.

Zu zeigen ist $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Kommentar:

Zunächst wird geprüft, ob $A(n)$ wenigstens für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.
Sie ist es z.B. für $n=1$ (man hätte auch $n=3$ nehmen können).

Wir tun nun so, als sei $A(n)$ für alle n richtig; für $n=1$ haben wir das oben eingesehen. Unter dieser Voraussetzung versuchen wir die Ind.beh. zu zeigen. Wir ersetzen in $A(n)$ jedes n durch $(n+1)$.

---

1) $\sum$ ist das Summensymbol. Statt der Summe der rellen Zahlen a_i setzt man $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(k \leq n, i \leq n)$

Oben ist $a_k = k$.

z.B. $a_k = k^2$: $\sum_{k=3}^{n-1} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + (n-1)^2$ $(4 < n)$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\text{l.S.} &= \sum_{k=1}^{n+1} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\
\text{Ind.vor.} \nearrow &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} \\
\text{Vietà} \quad &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \text{r.S.}
\end{aligned}
$$

wesentlich ist, daß man an einer Stelle ($\nearrow$) die Ind.annahme verwendet.

w.z.b.w.

Warum sind wir fertig?

Nun, für n=1 war A(n), also A(1), wahr. Daher: A(1) ist wahr.
Nach dem Induktionsschritt muß dann auch die Aussage wahr sein, wenn man n um 1 erhöht.
Daher: A(2) ist wahr.

Nimmt man nun A(2) als wahren Induktionsanfang, so ist wieder nach dem Ind.schritt A(n+1), also A(3), wahr.
Daher: A(3) ist wahr.

Merkt ihr was? So geht es weiter.
A(3) ist wahr. Der Ind.schritt liefert daher A(4) ist wahr.

A(4) ist wahr. Der Ind.schritt liefert daher A(5) ist wahr.

usw.

Somit kann man sich ausgehend von der <u>einmal</u> als wahr erkannten Aussage A(1) zu jedem n "weiterhanteln", so daß A(n) also für <u>jedes</u> beliebige n als wahr erkannt worden ist.

Natürlich sieht das auf den ersten Blick kompliziert aus. Das ist es aber nicht. Sonst wäre dieses Verfahren nicht so berühmt. Es erfordert nur ein bißchen Eingewöhnung und Übung. Jeder Mathematiker schätzt sich glücklich, wenn die Aufgabenstellung ihm einen Beweis mit vollständiger Induktion ermöglicht.
Soviel über den wesentlichsten Inhalt meines Referates. Es wurden dann noch einige Beispiele von den Schülern selbst ausprobiert.
In einer der nächsten Veranstaltungen komme ich auf diese Thematik nochmal zurück.