M A T H E M A T I K I N F O R M A T I O N
GYMNASIUM STARNBERG
FACHBEREICH MATHEMATIK NR. 1
12. 1. 1981

Zur Einführung des Integralbegriffs in K12

Bei der Einführung des RIEMANNschen Integrals wäre ein Idealzustand erreicht, wenn der Schüler zumindest erahnen würde, daß sich hinter

$$\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R} \quad \text{mehr als} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{[x_i;x_{i+1}]} f(x)\cdot(x_{i+1}-x_i) \in \mathbb{R}$$

verbirgt.

Problem A

Deshalb stellen die meisten Analysisbücher eine Definition an den Anfang, die auch im Leistungskurs mindestens 4 Unterrichtsstunden kostet, ohne daß eigentlich dem Schüler klar werden kann, weshalb eine solch komplizierte Definition zur Einführung eines Berechnungsverfahrens für ein Flächenmaß erforderlich ist.

Problem B

Da an der Schule anschließend als Integranden im wesentlichen nur analytische Funktionen, also solche, die in ihrem Definitionsbereich beliebig oft differenzierbar sind, vorkommen, erhebt sich wahrlich die Frage, ob sich dieser komplizierte Einstieg für die Schule lohnt. In den meisten Schullehrbüchern hat man wohl deshalb den Einstieg in die Integralrechnung vereinfacht, so aber notwendiger Weise auf wesentliche Inhalte des Integralbegriffs verzichtet. Aus solchen Überlegungen heraus hat man vorgeschlagen, an der Schule doch überhaupt auf den historischen Einstieg in die Integralrechnung zu verzichten, also auf den sogenannten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung als Satz zu verzichten und mit dieser Aussage als Definition zu beginnen. Diese antididaktische Inversion ruft bekannte Bedenken hervor (siehe hierzu auch KIRSCH [1]): Die mathematische Kulturleistung dieses Satzes bleibt außer acht; darüber hinaus gehen weitere wichtige Sätze für die Anwendung des Kalküls verloren; z.B.:

Gilt für die in $[a,b]$ integrierbaren Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Beziehung $f(x) \leq g(x)$ in $[a,b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Problem C

Übrigens auch neuere Vorschläge von KIRSCH [2] oder KIRSCH und [illegible] [3], das Integral mehr oder weniger als anschauliches Maß des Flächeninhalts zu definieren, führen nicht an den Problemen vorbei.

Der folgende Vorschlag versucht, die drei genannten Probleme zu lösen in einer Art, daß die vorhandenen Lehrbücher, wenn auch in geänderter Reihenfolge, noch benutzt werden können.

Der Leser möge beachten, daß es sich bei dem aufgezeichneten Vorschlag nur um eine Alternative zum üblichen Weg handeln kann.

§1 Umkehrung der Differentiation.

Eine Zusammenfassung der vom Schüler vorher kennen gelernten Differentiationsregeln zeigt, daß das Differenzieren eine (einstellige) Rechenoperation (oder auch Abbildung) auf der Menge der differenzierbaren Funktionen ist. Denkt man an früher kennen gelernte Rechenoperationen (z.B. im Körper), so ist die Frage nach der Umkehrbarkeit dieser Operation naheliegend, d.h. man kommt zu der Frage:

Wie erhält man eine Funktion F, deren Ableitung gleich einer vorgegebenen Funktion f ist?

1.1 Definition: $F(x)$ heißt in $[a,b]$ Stammfunktion von $f(x)$ genau dann, wenn in $[a,b]$ $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ ist.

Aus den bereits früher kennen gelernten Differentiationsregeln findet man sofort die folgende Liste:

$f(x)$	$F(x)$
$y = 1$	$y = x$
$y = x^n$	$y = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1}$
$y = \sin x$	$y = -\cos x$
$y = \cos x$	$y = \sin x$

Auch Summen dieser Funktionen werden untersucht. Hierbei finden die Schüler meist selbst:

1.2 Hilfssatz: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, dann auch $F(x) + C$ mit beliebigem C aus $\mathbb{R}$.

Es lohnt sich also, von der Menge aller Stammfunktionen $F(x)$ einer gegebenen Funktion $f(x)$ zu sprechen; daß hierbei die *Sprechweise* "unbestimmtes Integral" mit einer noch nicht verständlichen Zeichensprache eingeführt wird, stört i.a. bei Kollegiaten nicht, wenn der Lehrer daraufhinweist, daß der spätere Unterricht hierzu noch weiteres bringt.

1.3 Definition: $\int f(x)dx := \left\{ F(x) : \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \right\}$ heißt unbestimmtes Integral.

Will man mit diesen Mengen rechnen, braucht man ihre Verträglichkeit mit den in $\mathbb{R}$ geltenden Rechenoperationen + und $\cdot$; deshalb definiert man:

1.4 Definition: M, M_1, M_2 seien Mengen aus reellen Funktionen, c sei aus $\mathbb{R}$ beliebig; dann gelte:

$c \cdot M := \left\{ c \cdot f(x) : f(x) \in M \right\}$;

$M_1 + M_2 := \left\{ f(x) + g(x) : f(x) \in M_1,\ g(x) \in M_2 \right\}$;

Ist M eine Menge aus differenzierbaren Funktionen, so sei

$\frac{dM}{dx} := \left\{ \frac{df(x)}{dx} \text{ mit } f(x) \in M \right\}$.

Hiermit lassen sich die folgenden Formeln beweisen:

<u>1.5 Satz:</u> a) $\int c\cdot f(x)dx = c\cdot \int f(x)dx$, falls $\int f(x)dx$ existiert.

b) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, falls $\int f(x)dx$ und $\int g(x)dx$ existieren.

Für a) wird ein Beweis skizziert:
Man muß zeigen, daß die Mengen $M_1 = \int c\cdot f(x)dx = \left\{F(x): \frac{dF(x)}{dx} = cf(x)\right\}$

und $M_2 = c\cdot \int f(x)dx = \left\{cG(x): \frac{dG(x)}{dx} = f(x)\right\}$

übereinstimmen:

1. Aus $cG(x)$ aus M_2 folgt $\frac{dcG(x)}{dx} = cf(x)$ oder $cG(x)$ ist ein $F(x)$ aus M_1; d.h. es gilt $M_2 \subseteq M_1$.
2. Aus $F(x)$ aus M_1 folgt $\frac{d\frac{F(x)}{c}}{dx} = f(x)$ oder $\frac{F(x)}{c}$ ist Stammfunktion von $f(x)$, also $c\cdot \frac{F(x)}{c} = F(x)$ aus M_2; d.h. es gilt $M_1 \subseteq M_2$.

Aus 1. und 2. ergibt sich sofort $M_1 = M_2$.

Unterdessen haben die Schüler durch Hausaufgaben das Finden von Stammfunktionen geübt. Sie stellen jetzt selbst die Frage nach der Kardinalität des unbestimmten Integrals:

<u>1.6 Satz:</u> Hat $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$, so gilt:

$$\int f(x)dx = \{ F(x) + C \text{ mit } C \in \mathbb{R} \}.$$

Aus historischen Gründen schreibt man hierfür:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Der Beweis wird - wie in jedem Lehrbuch - mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung geführt.

Schließlich wird der Tatbestand, daß das Integrieren die Umkehrung des Differenzierens ist, im folgenden Satz zusammengefaßt:

<u>1.7 Satz:</u> Ist $F(x)$ in $[a,b]$ differenzierbar, so gilt:

$$\int \frac{dF(x)}{dx}\, dx = F(x) + C.$$

Hat $f(x)$ in $[a,b]$ eine Stammfunktion, so gilt

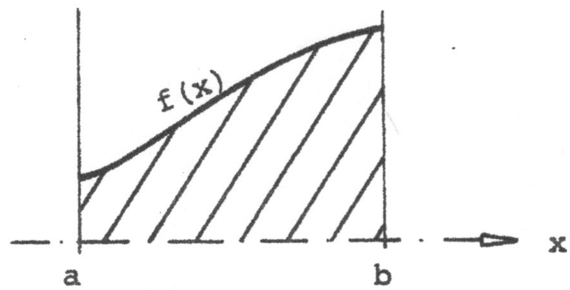
$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x).$$

Auf einen Beweis der ersten Formel kann hier verzichtet werden; die zweite Formel ist eine unmittelbare Folge von 1.4.

Bei den kennen gelernten analytischen Funktionen kann man also das unbestimmte Integral raten; offen bleibt die Frage: Welche Funktionen haben eine Stammfunktion. Bevor der Lehrer aber diese Frage zu beantworten sucht, führt er erst eine wichtige Anwendung vor.

§2 Flächeninhalt.

2.1 Definition: Die Funktion $f(x)$ sei stetig in $[a,b]$ und habe dort eine Stammfunktion $F(x)$. Es sei $0 \leq a \leq b$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann zeigt die Anschauung[1]: Die schraffierte Fläche hat einen Flächeninhalt I.



Für seine Größe definiert man:

$I := F(b) - F(a)$ und

schreibt hierfür:

$$I =: \int_a^b f(x)dx.$$

Man braucht einige Eigenschaften des Symbols $\int_a^b f(x)dx$, deren Beweise sehr einfach sind:

2.2 Satz: $\int_a^a f(x)dx = 0$, falls $f(x)$ bei a eine Stammfunktion hat.

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, falls $f(x)$ in $[a,b]$ eine Stammfunktion hat

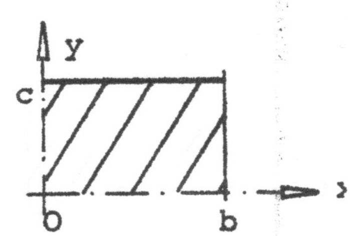
$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$, falls $f(x)$ in $[a,b] \cup [b,c]$ eine Stammfunktion hat.

$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, falls $f(x)$ in $[a,b]$ eine Stammfunktion hat

$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$, falls $f(x)$ und $g(x)$ in $[a,b]$ Stammfunktionen haben.

Man muß nun zeigen, daß 2.1 mit dem früher kennengelernten, elementargeometrischen Flächeninhalten übereinstimmt:

2.3 Satz: 2.1 stimmt mit den früher kennengelernten Flächeninhalten für Rechteck, Dreieck, Trapez, Kreis überein.



Beweis:

1. Jede Rechtecksfläche kann man durch eine Bewegung in die skizzierte Lage bringen; dann gilt:

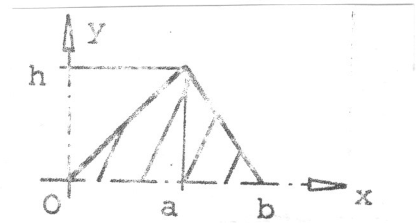
---

[1]) Es ist für den weiteren Verlauf durchaus bedeutsam, ob man die ohnedies sehr knapp bemessene Unterrichtszeit für einige durchaus auf gymnasialem Niveau durchführbaren maßtheoretischen Betrachtungsweisen (vergl. z.B. KIRSCH [2]) oder mehr für die Anwendungen des Integralbegriffs nutzt. Ich bevorzuge letzteres, weil ich davon ausgehe, daß der Lehrer ohnedies zum Flächeninhaltsmaß nicht viel mehr sagen kann, außer daß er noch damit verbundenenmaßtheoretischen Schwierigkeiten wie Flächenzerlegbarkeitsgleichheit, Wahl der Maßeinheit u.a. andeutet und hinreichende Bedingungen (siehe 2.1) für die Existenz eines Inhaltsmaßes angibt.

$\int_0^b c\,dx = cx\Big|_0^b = cb - 0 = cb$

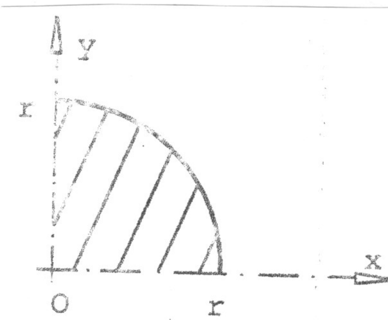
Die Schreibweise $cx\Big|_0^b$ wird auch hier als Gedächtnisstütze verwendet.

2. Jede Dreiecksfläche kann durch eine Bewegung in die nebenstehende Lage gebracht werden. Das Dreieck wird durch eine Höhe in der angegebenen Weise unterteilt. Dann gilt:
   $I = \int_0^a \frac{h}{a} x\,dx + \int_a^b \frac{h}{a-b}(x-b)\,dx = \ldots = \frac{h}{2}\, b.$



3. Auf die Berechnung der Trapezfläche kann hier verzichtet werden; anders ist das mit der Kreisfläche.

   Bringt man durch eine Bewegung ein Kreisviertel in die skizzierte Lage, so gilt für seinen Flächeninhalt
   $I = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = r^2 \frac{\pi}{4}.$



   Letzteres kann man allerdings nur ausrechnen, wenn man die Kettenregel für das Differenzieren und analog §1 hierzu als Umkehrung die Substitutionsregel für das Integrieren kennengelernt hat. Andererseits sollte man nicht versäumen, an dieser Stelle auf die näherungsweise Berechnung des Flächeninhalts des Kreises der 10. Jahrgangsstufe hinzuweisen, woraus folgt, daß wegen 2. auch der Flächeninhalt des Kreises das elementargeometrische Ergebnis sein muß.

Bei dem eben beschriebenen Aufbau ist sicher vorteilhaft, daß man gleich mit Integrationsübungen, Flächenberechnungen beginnen darf, wie man sie in allen Lehrbüchern finden kann. Selbstverständlich soll man nun auch das „bestimmte Integral" von negativwertigen Funktionen berechnen: Schüler finden sehr schnell, daß stets längs der y-Achse eine Verschiebung existiert, die aus der negativwertigen Funktion eine positivwertige wie in 2.1 macht.

Jetzt aber wird der Schüler selbst die Frage stellen können: Welche Funktionen haben eine Stammfunktion - oder ein Integral.

§3 Das RIEMANNsche Integral

Man sucht hinreichende Bedingungen für die Integrierbarkeit einer Funktion. Da man zuletzt mit dem Begriff Flächen berechnen konnte, scheint es naheliegend, beim Aufstellen solcher hinreichenden Bedingungen die Flächenberechnung zu nutzen.

Dies muß hier nicht geschehen, weil diese Unterrichtssequenz mit mehr oder weniger Lücken in allen einschlägigen Lehrbüchern nachzulesen ist. Ein exakter Beweisgang für die zu suchenden hinreichenden Bedingungen wird wohl stets über das Mögliche am Gymnasium hinausgehen, doch sollte trotzdem die Einführung des RIEMANNschen Integrals so geschehen, daß die folgenden, stichpunktartig aufgezählten Eigenschaften des Integrals vom Schüler erahnt werden:

a) In der Regel definiert man zunächst untere $\underline{J}$ und obere $\overline{J}$ DARBOUXsche Integrale; hierzu benutzt man in Teilintervallen Infimum und Supremum der zu betrachtenden Funktion. Der Schüler sollte erkennen, daß wegen der Gültigkeit des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen für letztere Funktionen diese Unterscheidung nicht erforderlich ist, ja daß jeder Funktionswert $f(x)$ mit $\inf f(x) \leq f(x) \leq \sup f(x)$ die "Rolle" des z.B. Infimums im unteren DARBOUXschen Integral übernehmen kann, also insbesondere gilt $\underline{J} = \overline{J}$, daß aber bei nicht stetigen Funktionen die Unterscheidung zwischen $\underline{J}$ und $\overline{J}$ notwendig ist.

b) Das DARBOUXsche Integral wird meist als Grenzwert etwa in der folgenden Form dargestellt:

$$\underline{J} := \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) \cdot (x_{i+1} - x_i). \qquad (1)$$

Dem Schüler muß bekannt sein, daß diese Schreibweise eine Nebenbedingung impliziert:

Das längste Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ geht beim Grenzübergang gegen 0. (2

Dem Schüler sollte aber auch einsichtig sein, daß das DARBOUXsche Integral $\underline{J}$ erst dann existiert, wenn für <u>jede</u> Unterteilung des Integrationsintervalls $[a,b]$ mit Verfeinerungen, die im Grenzwert (2) erfüllen, dieselbe reelle Zahl $\underline{J}$ existieren muß, damit man von der Existenz eines DARBOUXschen Integrals sprechen kann.

Erst wenn in diesem Sinn $\underline{J}$ und $\overline{J}$ existieren und $\underline{J} = \overline{J}$ gilt, spricht man von der Existenz eines RIEMANNschen Integrals.

Um zunächst sauber von 2.1 unterscheiden zu können, schreiben wir hierfür

$$\underline{J} = \overline{J} = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dies ist also mehr als nur ein Grenzwert der Form (1) (vergl. das eingangs erwähnte *Problem A*!).

c) Ist in einem Intervall $[a,b]$ für eine Funktion $f(x)$ der unter b) beschriebene Weg möglich, dann nennt man $f(x)$ in $[a,b]$ integrierbar. Der Schüler soll zwischen der Frage nach dieser Integrierbarkeit (siehe b)) und der Integralberechnung unterscheiden können, wenn die Integrierbarkeit einer Funktion bereits geklärt ist; dann nämlich genügt es, einen der vielen Grenzwerte (1) zu berechnen. Hier erweisen sich dann die in vielen Lehrbüchern des Gymnasiums getroffenen Spezialisierungen wie äquidistante Teilungen oder Halbierungen des Integrationsintervalls als sinnvoll.

d) Man sollte nicht vergessen darauf hinzuweisen, daß beim CAVALIERIschen Prinzip oder auch bei der Kreisrektifikation der 10.Jahrgangsstufe Integrale berechnet wurden, dort aber stets die Frage nach der Integrierbarkeit unterschlagen wurde, da man damals stets für <u>eine</u> Unterteilung mit einer <u>speziellen</u> Verfeinerung das Integral berechnete.

e) Der in b) beschriebene Weg liefert das folgende Ergebnis:

<u>3.1 Satz:</u> Jede im abgeschlossenen Intervall beschränkte und monotone Funktion ist RIEMANNsch integrierbar.

Hieraus folgt:

<u>3.2 Satz:</u> Jede in [a,b] stetige Funktion ist integrierbar.

Der Schüler soll erkennen, wie wichtig solch allgemeine Sätze sind, da b) für eine einzelne Funktion unlösbar ist. Der Schüler sollte aber auch wissen, daß es sich hierbei um hinreichende, aber nicht notwendige Bedingungen handelt. So ist z.B.

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ x + 2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

in jedem Intervall um 0 integrierbar, obwohl in solchen die Voraussetzungen von 3.1 oder 3.2 nicht erfüllt sind.

Wichtige in §1 nicht beweisbare Sätze folgen (vergl. das eingangs erwähnte *Problem C*!):

<u>3.3 Satz:</u> f(x) und g(x) seien in [a,b] integrierbare Funktionen, für die in [a,b] gilt $f(x) \leq g(x)$; dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx .$$

Hieraus folgt:

<u>3.4 Korollar:</u> Ist f(x) in [a,b] integrierbar und $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$, so ist

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Anhand von b) stellt man fest:

$\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$, falls $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$ usw.

Als Abschwächung von §2 definiert man:

<u>3.5 Definition:</u> Ist f(x) eine in [a,b] stetige Funktion ohne Vorzeichenwechsel, dann ordnet man der von x = a, x = b, y = 0 und y = f(x) eingeschlossenen Fläche den Inhalt

$$I := \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{zu.}$$

Offen bleibt nach wie vor die Frage, die während des skizzierten Weges entstand:

Stimmen die Integralbegriffe aus §2 und §3 überein? *Problem D*

§4 Integralfunktion und Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Völlig analog zur üblichen Lehrbuchliteratur führt man den Begriff der Integralfunktion ein und zeigt:

4.1 Hauptsatz: Ist f(x) stetig in [a,b], so gilt dort:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Damit aber kann die am Ende von §1 gestellte Frage beantwortet werden:

4.2 Satz: Jede in [a,b] stetige Funktion f(x) hat die Stammfunktion

$$\int_a^x f(t)\,dt\ .$$

Der Schüler soll beachten, daß es für die Integralrechnung charakteristisch ist, daß auch diese Frage "nur" durch eine hinreichende Bedingung beantwortet werden kann. Der Schüler soll einsehen, daß mit 4.2 mehr als bei §1 geleistet wird; denn jetzt zeigt sich, daß nicht nur wie in §1 analytische Funktionen Stammfunktionen haben, sondern z.B. auch

$$\int |x|\,dx$$

sinnvoll ist.

Wie üblich zeigt man:

4.3 Satz: Ist F(x) eine beliebige Stammfunktion der stetigen Funktion f(x), so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Damit aber ist *Problem D* gelöst:

4.4 Satz: Hat f(x) in [a,b] eine Stammfunktion F(x), so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx.$$

Der Schüler erfaßt, daß in der Integralrechnung für die Integrierbarkeit zwar hinreichende Bedingungen angegeben werden können, daß aber die Klasse der integrablen Funktionen nicht genau beschrieben werden kann.

Anschließend kann nun der Lehrer darauf hinweisen, daß es jetzt mit dem in §3 geschilderten Weg möglich ist, völlig abstrakt, d.h. ohne Benutzung der Anschauung einen Flächeninhalt zu definieren (vergl. das eingangs erwähnte *Problem B*!). Es sei nochmals in diesem Zusammenhang auf KIRSCH [2] verwiesen, aber auch auf die einschlägige Literatur der Maßtheorie.

Schlußbemerkung:

Der aufmerksame Leser wird festgestellt haben, daß der vorliegende Artikel eine Alternative zur Reihenfolge im CULP [1] für den Leistun kurs darstellt. Sie wurde während der letzten 10 Jahre laufend am Studienkolleg München und neuerdings auch an einem Gymnasium praktiziert. Die Vorteile liegen auf der Hand: Frühzeitig kann man mit Übu gen üblicher Art beginnen und so schülergerecht unterrichten. Darübe hinaus wird die umfangreiche Definition des RIEMANNschen Integralbegriffs möglichst lang vermieden.

So ergibt sich aber auch für den Grundkurs eine echte Alternative, vor allem dann, wenn man an CULP [1] 3.1.1.1.2 Spalte Unterrichtsverfahren denkt, wo es heißt: "Beim Beweis des Hauptsatzes genügt es, die benötigten Hilfssätze plausibel zu machen".
Außerdem wird im Grundkurs der Integralbegriff wohl nur auf analytische Funktionen angewendet.
Deshalb empfehlen sich für den Grundkurs die §§1 und 2. §3 kann erwähnt werden, §4 wird aber in der Regel entfallen (vergl. hierzu auch KIRSCH [1]!).

Literaturverzeichnis:

CULP [1]: Curricularer Lehrplan für Leistungs- und Grundkurs Mathematik in der Kollegstufe, Amtsblatt des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus Teil I, Sondernumme 18, 23.6.1980, Jahrgang 1980.

KIRSCH,A. [1]: Eine "intellektuell ehrliche" Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen, Didaktik der Mathematik 2(1976) Seite 87-105.

KIRSCH,A. [2]: Natürliche und formale Auffassung des Flächeninhaltes Praxis der Mathematik 1979 Heft 3 Seite 65 - 69.

KIRSCH,A. und BLUM W. [3]: Der Mathematikunterricht 3 (1979) Seite 3- 21.