Da $g \leqq b$ ist, folgt $\rho = g\sqrt{1 - (\frac{g}{2b})^2} \geqq g\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{g}{2}\sqrt{3} \geqq g \cdot 0{,}8$ oder
$2\rho \geqq 1{,}6 \cdot g \geqq 1{,}6 \cdot r \geqq r$.

Nach dem Hilfssatz nehmen aber dann die roten Punkte auf dem roten Kreis alle Abstände d zumindest mit $0 \leqq d \leqq r$ an. Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

Aus I., II., III. folgt: Der Satz gilt in jedem Fall.

Karlhorst Meyer:

Nichteuklidische Geometrie im KLEINschen Modell [1)]

1. Einleitung

Wir alle sind gewohnt, im Raum, in dem wir leben, Geometrie zu machen. Nicht immer war man sich einig, was das heißt, "Geometrie zu machen". Sicher, es geht hierbei um die uns altvertrauten Dinge, wie Punkte, Geraden u.a.m. Manchmal - heute nur noch seitens einiger Philosophen - fragte man sich, was sind die Punkte, was ist eine Gerade. Mathematiker haben seit HILBERT - ACKERMANN [7] spätestens aufgehört, so zu fragen, ja sie nennen solches heute ausgesprochen unmathematisch; stattdessen fragt man als Mathematiker: "Was kann man mit den Punkten und Geraden machen"; die für Punkte und Geraden zutreffende "Struktur" ist das mathematische Untersuchungsobjekt. Ziel solcher mathematischer Grundlagenforschung ist es seit EUKLID [4], abstrakt das, was man mit den Dingen machen kann, so zu beschreiben (anhand eines Axiomensystems, also anhand von allgemein anerkannten, nicht zu beweisenden Sätzen),
daß das Wunschziel eines Grundlagenforschers erfüllt wird, eben daß in unserem Fall auf die beschriebene Struktur nur noch die Punkte und Geraden des Erfahrungsraums passen.

Meist leisten dies die Axiomensysteme nicht; der Mathematiker kennt dann mehrere "Modelle", d.h. mehrere u.U. grundlegend verschiedene Systeme von Dingen, die die beschriebene Struktur dulden; z.B.:

2. Inzidenzstruktur

Gegeben sei eine Menge $\mathbb{P}$, die wir Punktmenge nennen. Gewisse Teilmengen aus $\mathbb{P}$ sollen Geraden g heißen; die Geraden bilden ihrerseits eine Menge $\mathbb{G}$. Wegen dieser Definition steht fest, ob für einen Punkt P und eine Gerade g gilt $P \in g$ oder $P \notin g$ (Man nennt die so entstandene Struktur $\in$ eine Inzidenzstruktur). Häufig sind für $\in$ die folgenden Axiome zu beobachten:

A1 Zu zwei verschiedenen Punkten P und Q gibt es genau eine inzidente Gerade g, d.h. eine Gerade durch P und Q.

A2 Es gibt 4 Punkte, von denen keine drei gemeinsam auf einer Geraden liegen.

Wir werden im folgenden erkennen, daß es äußerst verschiedene Modelle hierzu gibt. Kommt das Axiom A3 hinzu, so spricht man von einer *affinen Ebene*:

[1)] Dieser Vortrag kann Stoff für mathematische Vertretungsstunden und Stunden vor den Ferien liefern. Der didaktische Hintergrund des Vortrags wird Thema eines gleichlautenden Vortrags auf der Bundestagung für Didaktik der Mathematik an der TU Aachen 1986 sein.

A3 Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P mit $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade h durch P, die g nicht schneidet, d.h. $g \cap h = \emptyset$.
Dieses Axiom geht auf EUKLID zurück, der in [4] um 350 v.Chr. sich bemühte, möglichst lange von dieser Selbstverständlichkeit der Anschauungsebene keinen Gebrauch zu machen und so als Begründer der sogenannten absoluten Geometrie bezeichnet werden kann; hiervon später.)

Offenbar gelten alle drei Axiome in jeder Ebene des Anschauungsraumes $\mathbb{R}^3$. Es ist allerdings klar, daß durch diese drei Axiome dieser Raum nicht im Sinne des Vorherigen charakterisiert wird, da ja auch in $\mathbb{Q}^3$ oder $\mathbb{Z}_5^3$ (siehe SMOLKA Seite 9) diese Axiome gelten.

Um nun die Menge der zu A1 und A2 passenden Modelle zu untersuchen, geht der Mathematiker u.a. den Weg der sogenannten *Verfremdung*, wenn er jetzt gezielt z.B. A3 abändert. Auf diese Idee kam wohl erstmals GAUSS [5], wie wir aus seinen Briefen wissen. BOLYAI und LOBATSCHEWSKI fanden Lösungen, d.h. sie untersuchten eine Geometrie mit A1, A2 und

A3' Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P mit $P \notin g$ gibt es mindestens 2 Geraden h_1, h_2 durch P, die g nicht schneiden, d.h. $h_i \cap g = \emptyset$.

Übrigens, die Geometrie der Punkte und Großkreise auf einer Kugel erfüllt A1, A2 und

A3" Zu jedem Großkreis g und Kugelpunkt P mit $P \notin g$ gibt es keinen Großkreis h durch P, der g nicht schneidet, d.h. $g \cap h \neq \emptyset$.

Dies läßt sich sofort an jedem Globus anschaulich überprüfen.

Alle Inzidenzgeometrien mit A1, A2 und einem abgeänderten A3 heißen *Nichteuklidische Geometrien*. Im Fall A3' nennt man die Geometrie *hyperbolisch* (im Fall A3" *elliptisch*).

FELIX KLEIN (1849 - 1925), der berühmte Mathematiker der Universität Erlangen, fand für den Fall A1, A2, A3' ein interessantes Modell:

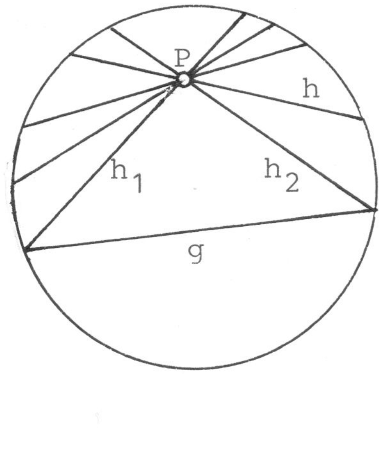
2.1 Definition (sog. KLEINsches Modell):

In der Zeichenebene (also der Anschauungsebene mit all ihren Eigenschaften) sei $\mathbb{P}_h$ das Innere eines Kreises (genannt *Randkreis*; man beachte: Der Randkreis definiert zwar diese Geometrie, gehört aber nicht zu ihr!). Ist g eine Gerade der Zeichenebene, so sei $g_h := g \cap \mathbb{P}$ eine Gerade aus $\mathbb{G}_h$.

2.2 Satz: Im KLEINschen Modell gelten A1, A2 und A3'.

Dies läßt sich leicht anhand einiger Zeichnungen "überprüfen"; z.B.:

h_i $i=1,2$ (siehe nebenstehende Zeichnung) heißen *Randparallele* zu g. Alle Geraden h "zwischen h_1 und h_2 sind Parallele, also Nichtschneidende zu g.



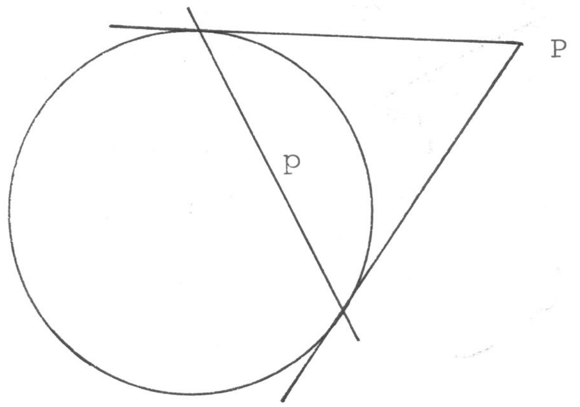
Bemerkung: Lange Zeit sah es so aus, als wäre die Anordnung der Zeichenebene (Innen und Außen eines Kreises) eine grundlegende Voraussetzung für das KLEINsche Modell; dies ist aber falsch; man kennt heute hyperbolische endliche Ebenen, die wegen der Endlichkeit des zugrunde gelegten Koordinatenkörpers sicher keine Anordnung besitzen; dies ist immer möglich, wenn für den Koordinatenkörper K gilt char $K \neq 2$).

Eine Inzidenzgeometrie der beschriebenen Art bleibt mit ihrer Struktur recht mager, wenn nicht metrische Eigenschaften (Längen und Winkel) hinzukommen. Um einen ersten Schritt in Richtung Metrik zu machen, wird im folgenden eine besondere Abbildung studiert:

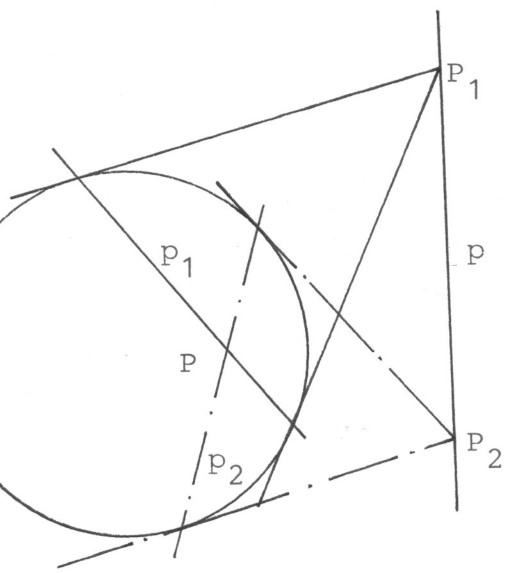
3. Polarität am Kreis

3.1 Definition: Gegeben ist ein fester Kreis k der Anschauungsebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G}, \in)$. Die Abbildung $\pi: \mathbb{P} \cup \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G} \cup \mathbb{P}$ heißt Polarität am Kreis k, wenn für alle Punkte P gilt $\pi(P)$ ist eine Gerade, wenn für alle Geraden g gilt $\pi(g)$ ist ein Punkt.

Die Zuordnung π zwischen Geraden und Punkten geschieht durch die folgende Konstruktion:



1. $P \in k$, dann sei $p = \pi(P)$ die Tangente in P an k.
2. P sei außerhalb von k, dann sei $\pi(P)$ die Verbindungsgerade p der Berührpunkte der Tangenten von P an den Kreis k.



3. P sei innerhalb von k; man lege zwei verschiedene Geraden p_1, p_2 durch P, konstruiere in deren Schnittpunkten mit k die Tangenten und finde so deren Schnittpunkte P_1, P_2. $p = \pi(P)$ sei dann die Verbindungsgerade von P_1 mit P_2.
4. π sei involutorisch, d.h. $\pi^2 = id$, d.h. $\pi(p) = P$ mit $\pi(P) = p$ (1)

In jedem Fall heißt p *Polare des Pols* P.

3.2 Satz: Aus $Q \in p$ folgt $\pi(Q) \ni \pi(p)$. (2)

Dieser Zusammenhang läßt sich leicht anschaulich zeigen: Läuft Q auf p, so dreht sich $\pi(Q)$ um $\pi(p)$. Der Beweis läßt sich elementargeometrisch aus 3.1 führen, geht aber wesentlich eleganter, wenn man die Problematik algebraisiert:

Hat der Kreis die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, so bekommt die Polare zu $P = (p_1, p_2)$ die Gleichung $x_1 p_1 + x_2 p_2 = r^2$ usw. (3)

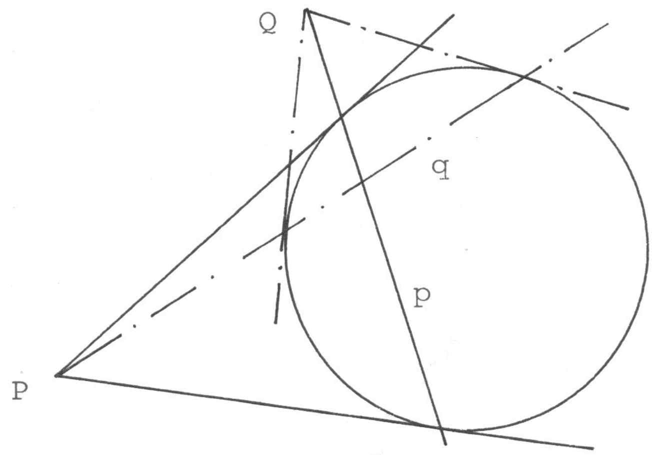
Sehr ausführlich und sehr allgemein ist die algebraische Form der Polarität bei DIEUDONNÉ dargestellt (siehe [2]). Eine noch allgemeinere Polarität findet man bei MEYER [9], die dort auf den Eigenschaften (1) und (2) fußt.

Man interessiert sich für Polaritäten, weil durch sie das Senkrechtstehen von Geraden definiert werden kann. In der euklidischen Geometrie wird hierbei aus (3) das gewöhnliche Skalarprodukt (Hierzu könnte man ein eigenes Mathematikseminar machen).

Aus 3.2 folgt unmittelbar:

3.3 Korollar: Aus $q \ni P = \pi(p)$ folgt $Q = \pi(q) \in p = \pi(P)$.

D.h. es gilt die folgende Konfiguration und weitere:



4. Spiegelungen im KLEINschen Modell

Gegeben sei die Polarität am Randkreis.

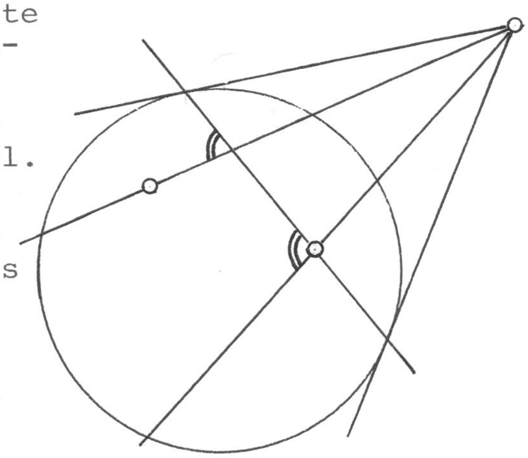
4.1 Definition: Zwei hyperbolische Geraden g_h, h_h stehen aufeinander senkrecht, i.Z. $g_h \perp h_h$ genau dann, wenn g_h durch den Pol von h_h geht.

Wegen 3.3 gilt:

4.2 Satz: $\perp$ ist eine symmetrische Relation auf $\mathbb{G}_h$, d.h. aus $g_h \perp h_h$ folgt $h_h \perp g_h$.

4.3 Satz: Lote fällen und errichten ist eindeutig.

Beweis:
Zur gegebenen Geraden g_h finde man den Pol; Lote fällen und errichten ist dann eindeutig, d.h. es gibt dann jeweils genau eine Lösung, weil nach A1 zwei Punkte jeweils genau eine Verbindungsgerade festlegen.



4.4 Satz: Zwei Geraden, die Lote zu einer Geraden g_h sind, sind hyperbolisch parallel.

Beweis:
Die beiden Geraden schneiden sich definitionsgemäß im Pol zu g_h, der außerhalb des Randkreises liegt.

Hierzu gilt auch die Umkehrung:

4.5 Satz: Zwei hyperbolisch parallele Geraden, die keine Randparallelen sind, haben ein gemeinsames Lot.

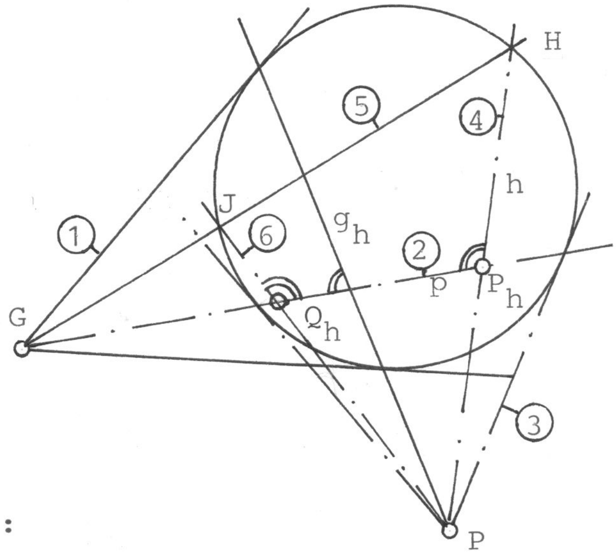
Beweis:
Die Polare zum Schnittpunkt der beiden hyperbolisch Parallelen ist das gesuchte Lot. Sind die beiden gegebenen Geraden euklidisch parallel, so ist das gemeinsame Lot das euklidische durch den Randkreismittelpunkt.

Offenbar haben Randparallele und Sich-schneidende keine gemeinsamen Lote.

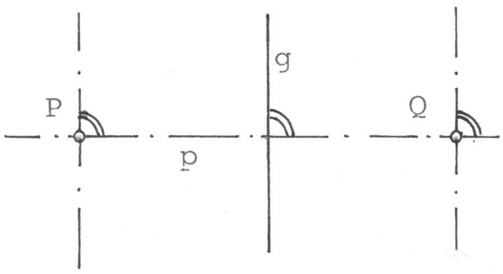
Wir werden uns im folgenden mit Spiegelungen befassen. Spiegeln bedeutet in der Anschauungsebene, daß man sich mit Messen befaßt, d.h. rechte Winkel hat, aber auch Längen übertragen kann. Ersteres steht uns im KLEINschen Modell zur Verfügung, letzteres nicht. Hier müssen wir uns anderweitig behelfen, aber es geht!
Bewegt man sich längs einer hyperbolischen Geraden gegen den Randkreis, so hat man die Vorstellung, man wandere nach Unendlich. So wird die folgende Definition naheliegend:

4.6 Definition: $S_g: \mathbb{P}_h \to \mathbb{P}_h$ heißt (hyperbolische) Spiegelung an g_h, wenn $S_g(P_h) = Q_h$ ist. Q_h gewinnen wir gemäß der folgenden Konstruktionsvorschrift:

1. Finde den Pol G zu g_h.
2. Lege durch P_h und G die Gerade p.
3. Suche den Pol P zu p
4. Lege durch P und P_h die Gerade h, Randpunkt H.
5. Verbinde H mit G; der weitere Schnittpunkt mit dem Randkreis sei J.
6. Verbinde J mit P; der Schnittpunkt mit p sei Q_h.



In Analogie hierzu geben wir den dazugehörigen euklidischen Zusammenhang an:



Dieser Weg scheint anschaulich zu sein; er ist allerdings mathematisch schwerfällig, denn zunächst bleibt offen, ob 4.6 "wohldefiniert" ist; d.h. man müßte u.a. beweisen:
HG ist keine Tangente des Randkreises, d.h. es existiert also J.
JP ist keine Tangente des Randkreises, d.h. es existiert also Q_h.
Grundsätzlich ist dies elementargeometrisch möglich, wird hier aber nicht ausgeführt. Der in [3] aufgezeigte Weg vermeidet diese Schwierigkeit, sein Verständnis setzt allerdings den hier gezeigten Weg voraus.

Aus 4.6 folgt unmittelbar:

4.7 Satz: S_g läßt alle Punkte von g_h elementweise fest. Man sagt g_h ist Fixpunktgerade von S_g.

A u s b l i c k :

Im KLEINschen Modell zeigt man als nächstes:
Das Spiegelbild eines rechten Winkels ist ein rechter Winkel. Man definiert: Zwei Strecken oder Winkel heißen kongruent, wenn sie durch mehrere Spiegelungen ineinander übergeführt werden. Sätze wie: Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, gelten auch hyperbolisch und elliptisch.
Diese Sätze sind also von A3, A3' und A3" unabhängig; sie sind ohne Parallelenaxiom beweisbar; deshalb nennt man sie Sätze der übergeordneten, der *absoluten Geometrie*. HJELMSLEV, THOMSON und dann BACHMANN [1] haben die zentrale Bedeutung der Spiegelungsgeometrie für die absolute Geometrie erkannt und ausgebaut. Lehrer waren von diesem Grundlagenstandpunkt in den 60-iger Jahren so begeistert, daß sie das Schulcurriculum

auf den Spiegelungsbegriff aufbauten.

L i t e r a t u r

[1] Bachmann, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff Springer Berlin-Heidelberg-Göttingen 1959

[2] Dieudonné, J.: La géométrie des groupes classiques, 2.Auflage Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963

[3] Ehlers, D.: Elementargeometrie im KLEINschen Modell, Facharbeit Gymnasium Starnberg 1982

[4] Euklid : Elemente, Band III, Leipzig 1933

[5] Gauss, C.F.: Gesammelte Werke

[6] Hjelmslev, J.: Neue Begründung der ebenen Geometrie, Math.Ann.64 Seite 449-474 (1907).

[7] Hilbert-Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik, Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg 6. Auflage 1972

[8] Klein, F.: Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, Springer Berlin 1928

[9] Meyer, Kh.: Verbandstheoretische Orthogonalität, aus Teorie combinatorie tomo II, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma 1976, p 281-311.

Der Besuch im Gerätewerk Erlangen

Zwei Schüler hatten die Aufgabe übernommen, über unseren Besuch im Gerätewerk zu berichten. Leider ist bis Redaktionsschluß kein Manuskript eingegangen. Es würde allerdings der Bedeutung dieses Besuchs nicht gerecht, wenn im vorliegenden Bericht nicht wenigstens kurz auf diese Veranstaltung eingegangen werden würde.

Für unsere Werksbesichtigung wurden vom Gerätewerk einige Herren ausgesucht,die zum großen Teil in der Ausbildung des Werks beschäftigt und so im Umgang mit Jugendlichen bestens vertraut waren. Stets hatten sie für unsere vielfältigen Fragen genügend Zeit. Die Fragen wurden mit größtmöglicher Sorgfalt und Ausführlichkeit beantwortet. Unser ganz besonderer Dank gilt deshalb ihnen. Unsere Schüler wurden schwer beeindruckt, als einige von ihnen das Schweißen ausprobieren durften, um so z.B. im Hinblick auf Genauigkeit eine Vorstellung zu bekommen. Unsere Schüler staunten bei den Laser-"Stanzen" und anderen modernen Werkzeugmaschinen, die sie vorher noch nie gesehen hatten.

Das Beeindruckendste aber war die Diskussionsrunde, die in ihrem Ablauf eindeutig das beste war, was wir während unserer Arbeit hinsichtlich Gymnasium in der modernen Arbeitswelt je gesehen hatten. Hier zeigte sich, daß die diesbezüglich geleistete Vorarbeit des Gymnasiums Starnberg nicht umsonst war, hier zeigte sich aber auch die hohe Bereitschaft des Hauses Siemens, unser Bemühen im Öffnen des Gymnasiums hin zur Arbeitswelt zu unterstützen. Präzise wurden die Schülerfragen beantwortet; man ließ bereitwillig Schüler z.B. hinter die Kulissen der Kalkulation und anderer Problemfelder schauen. Es wurden Kurzreferate geboten, die einen hohen Informationsstand aufzeigten und doch schülergerecht waren. Deshalb gilt unser ganz besonderer Dank den Organisatoren und Diskussionsteilnehmern dieser Veranstaltung.