Karlhorst Meyer:

Wie findet man eine Lösungsstrategie?

Seit etwa 40 Jahren beschäftigen sich Mathematiker, ausgehend von der mathematischen Logik in Teilgebieten wie Beweis- oder Kategorientheorie mit dem Grundsätzlichen mathematischer Strategien. Die Resultate, die bis heute bekannt geworden sind, scheinen immer noch ungeeignet, die Mathematikdidaktik der Schule in irgendeiner Form zu beeinflussen. So bleibt neben Kochbuchrezepten für die Schule allein die althergebrachte, bis heute also einzige Methode, dem Schüler so lange Lösungen und Beweise vorzuführen, bis er allmählich selbst beginnt, eigenständig Lösungen zu finden.
Leider muß man zugeben, daß durch Streß und Hektik des Mathematikunterrichts Lehrer zu selten veranlaßt werden, dem Schüler auseinanderzusetzen, wie man auf eine gerade gewählte Strategie kommt. Wir wollen hoffen, daß hier Lehrer in ihrem Verhalten unbeeinflußt sind vom mathematischen Publikationsstil, der sich auf Kürze um jeden Preis und optimale Prägnanz zurückzieht und so fast immer verheimlicht, wie der Autor die Lösung fand.

Ausgangspunkt war die folgende Aufgabe des Bundeswettbewerbs Mathematik 1985, die jeden Insider zu einer topologischen Argumentation verleitet und die meisten Outsider verwirrt:

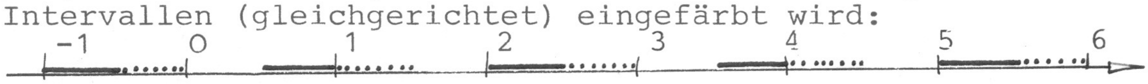
Aufgabe: Jeder Punkt des dreidimensionalen Raumes wird mit genau einer der Farben rot, grün, blau gefärbt. Die Mengen $\overline{R}$ bzw. $\overline{G}$ bzw. $\overline{B}$ bestehen aus den Längen derjenigen Strecken im Raum, deren beide Endpunkte gleichfarbig rot bzw. grün bzw. blau gefärbt sind.
Man zeige, daß mindestens eine dieser drei Mengen alle nichtnegativen reellen Zahlen enthält.

Zunächst wendet man ein G r u n d p r i n z i p an und fragt, was läßt sich an der Problemstellung v e r e i n f a c h e n :

1. Die Anzahl der Farben
2. Die Dimension

zu 1. Färben wir den Gesamtraum mit einer Farbe ein, so kommen alle Streckenlängen vor.

zu 2.
a) Die Dimension sei 1, also besteht der Gesamtraum aus einer einzigen Geraden, die in der folgenden Form mit drei Farben jeweils in halboffenen Intervallen (gleichgerichtet) eingefärbt wird:



Man erkennt: Keine der Mengen $\overline{R}$, $\overline{G}$, $\overline{B}$ enthält 1. Das Problem ist also nicht bei beliebiger Dimension und beliebiger Farbenanzahl lösbar.

b) Der Raum bestehe aus einer zweidimensionalen Ebene. Der Fall, daß alle Punkte nur mit einer Farbe eingefärbt sind, ist, wie oben, trivial. Nehmen wir deshalb an, daß zwei verschiedene Farben wirklich benutzt wurden. Es ergeben sich die Abstandsmengen $\overline{R}$ und $\overline{G}$. Geht man davon aus, daß auch hier ein analoger Satz gilt, wird behauptet, daß $\overline{R} = \mathbb{R}^+$ oder $\overline{G} = \mathbb{R}^+$ gilt. Die naheliegende Frage lautet also, was ist, wenn beide Mengengleichungen falsch sind? Dann gibt es z.B. einen roten Punkt R, zu dem kein weiterer roter Punkt den Abstand r hat. Die Frage, welche Menge bilden die Punkte, die den Abstand r von R haben, scheint naheliegend zu sein, die Antwort, d.i. ein grüner Kreis, auch.

Spätestens hier liegt der Versuch nahe, einen Widerspruchsbeweis zu führen.

c) Dreidimensional sind also bei der Aufgabe Kugeln zu untersuchen; noch ist allerdings unklar, welche Kugelkonfiguration zum Ziel führen wird.

3. Was ist das logische Gegenteil der Behauptung; Antwort:
Keine der Abstandsmengen $\overline{R}$, $\overline{G}$, $\overline{B}$ ist ganz $\mathbb{R}^+$. Es gibt also reelle Zahlen r,g,b mit $r \notin R$, $g \notin G$, $b \notin B$.
Wir werden diese Annahme ad absurdum führen.

4. Der nächste Schritt (siehe 5.) ist für den Erfahrenen naheliegend; die Erfahrung des Lehrers aber zeigt, daß dies nicht für Lernende gilt: Nach der "Erkenntnis 3." geht der Schüler i.a. zu rasch in die Rechnung und verliert so Zeit. Trotzdem will ich hier versuchen, die Schülerüberlegungen weiter zu verfolgen:

Die Punkte des dreidimensionalen Raumes sind mit rot, grün und blau eingefärbt. Um einen roten Punkt R gibt es deshalb eine Kugel K_R aus nur blauen und grünen Punkten, so wie es um den grünen Punkt G auf K_R im Abstand g eine Kugel K_G mit nur roten und blauen Punkten gibt. Aus Gründen dieser Konstruktion ist dann $K_R \cap K_G$, falls es nicht leer ist, ein Kreis aus blauen Punkten. Um die Existenzfrage dieses Kreises zu klären, wird spätestens hier der Schüler erkennen, daß er über den Größenvergleich zwischen r,g und b eine Vorwegaussage machen muß.

5. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 \leq r \leq g \leq b$; dies ist möglich, weil die Farbbezeichnung keine inhaltliche Unterscheidung nach sich zieht.

Der im folgenden wiedergegebene Beweis einer Schülerin erfordert nur noch Routinerechenarbeit

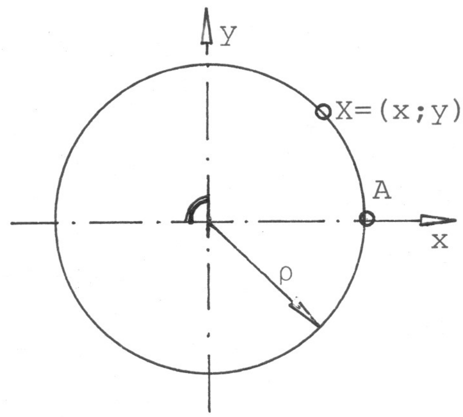
<u>Hilfssatz:</u> <u>Gibt es einen Kreis, nur mit Punkten einer Farbe und Radius ρ, dann kommen in dieser Farbe alle Abstände d mit $0 \leq d \leq 2\rho$ vor.</u>

Beweis: Abstand $\overline{AX} = \sqrt{(\rho - x)^2 + y^2} =$

$= \sqrt{(\rho - x)^2 + \rho^2 - x^2} = \sqrt{\rho^2 - 2x\rho + \rho^2} =$

$= \sqrt{2\rho^2 - 2x\rho}$ für $x: -\rho \leq x \leq \rho$. Da die Wurzelfunktion monoton steigt, folgt:

$2\rho = \sqrt{2\rho^2 + 2\rho^2} \geq \overline{AX} \geq \sqrt{2\rho^2 - 2\rho^2} = 0.$



I. Alle Punkte sind mit einer Farbe eingefärbt; dann kommen alle Abstände bereits längs einer Geraden durch den Raum bei dieser Farbe vor.

II. Der Raum ist mit 2 Farben eingefärbt, nur die 3. Farbe fehlt.
Annahme: In der Abstandsmenge komme die reelle Zahl r bei Rot und g bei Grün nicht vor. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $0 \leq r \leq g$ vorausgesetzt werden.
Dann gibt es um einen grünen Punkt G eine Kugel mit Radius g mit nur roten Punkten. Wegen des Hilfssatzes kommen dann auf einem Großkreis dieser Kugel alle Abstände d mit $0 \leq d \leq 2g$ vor. Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

III. Annahme: Färbt man alle Raumpunkte mit Blau, Grün, Rot ein und kommen alle 3 Farben vor, so kommt in der Abstandsmenge jeweils die reelle Zahl r bei Rot, g bei Grün, b bei Blau nicht vor. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann hierbei $0 \leq r \leq g \leq b$ vorausgesetzt werden. Dann gibt es um einen blauen Punkt B eine Kugel K_B mit Radius b ohne blaue Punkte.

1. Auf der Kugel sind nur Punkte einer Farbe grün oder rot; dann folgt wie bei II. ein Widerspruch zur Annahme.

2. Auf der Kugel sind rote und grüne Punkte. Man nehme einen grünen Punkt G, um den es dann eine Kugel K_G mit Radius g ohne grüne Punkte gibt. Wegen $g \leq b$ ist $K_G \cap K_B = K$ ein Kreis ohne grüne und ohne blaue Punkte, also ein roter Kreis. Man berechnet seinen Radius ρ:

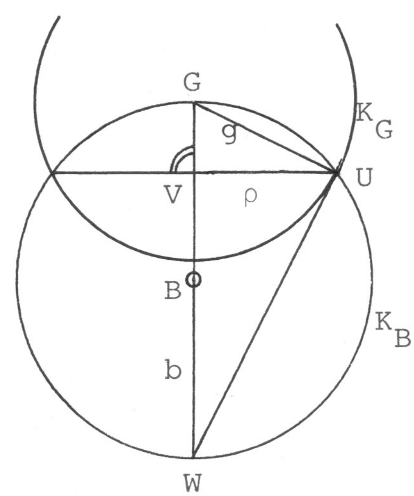
Nach THALES ist bei U ein rechter Winkel. Also gilt $\Delta UVG \sim \Delta WUG$, weil bei U und W Winkel sind, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen und bei U und V rechte Winkel sind. Also gilt:

$$\frac{\rho}{g} = \frac{\overline{UW}}{2b} = \frac{\sqrt{4b^2 - g^2}}{2b}$$

letzteres nach PYTHAGORAS. Oder

$$\rho = g \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{g}{2b}\right)^2}.$$

Dies ist am kleinsten, wenn $\frac{g}{2b}$ am größten ist.



Da $g \leqq b$ ist, folgt $\rho = g\sqrt{1 - (\frac{g}{2b})^2} \geqq g\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{g}{2}\sqrt{3} \geqq g \cdot 0{,}8$ oder
$2\rho \geqq 1{,}6 \cdot g \geqq 1{,}6 \cdot r \geqq r$.

Nach dem Hilfssatz nehmen aber dann die roten Punkte auf dem roten Kreis alle Abstände d zumindest mit $0 \leqq d \leqq r$ an. Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

Aus I., II., III. folgt: Der Satz gilt in jedem Fall.

Karlhorst Meyer:

Nichteuklidische Geometrie im KLEINschen Modell [1])

1. Einleitung

Wir alle sind gewohnt, im Raum, in dem wir leben, Geometrie zu machen. Nicht immer war man sich einig, was das heißt, "Geometrie zu machen". Sicher, es geht hierbei um die uns altvertrauten Dinge, wie Punkte, Geraden u.a.m. Manchmal - heute nur noch seitens einiger Philosophen - fragte man sich, was sind die Punkte, was ist eine Gerade. Mathematiker haben seit HILBERT - ACKERMANN [7] spätestens aufgehört, so zu fragen, ja sie nennen solches heute ausgesprochen unmathematisch; stattdessen fragt man als Mathematiker: "Was kann man mit den Punkten und Geraden machen"; die für Punkte und Geraden zutreffende "Struktur" ist das mathematische Untersuchungsobjekt. Ziel solcher mathematischer Grundlagenforschung ist es seit EUKLID [4], abstrakt das, was man mit den Dingen machen kann, so zu beschreiben (anhand eines Axiomensystems, also anhand von allgemein anerkannten, nicht zu beweisenden Sätzen),
daß das Wunschziel eines Grundlagenforschers erfüllt wird, eben daß in unserem Fall auf die beschriebene Struktur nur noch die Punkte und Geraden des Erfahrungsraums passen.

Meist leisten dies die Axiomensysteme nicht; der Mathematiker kennt dann mehrere "Modelle", d.h. mehrere u.U. grundlegend verschiedene Systeme von Dingen, die die beschriebene Struktur dulden; z.B.:

2. Inzidenzstruktur

Gegeben sei eine Menge $\mathbb{P}$, die wir Punktmenge nennen. Gewisse Teilmengen aus $\mathbb{P}$ sollen Geraden g heißen; die Geraden bilden ihrerseits eine Menge $\mathbb{G}$. Wegen dieser Definition steht fest, ob für einen Punkt P und eine Gerade g gilt $P \in g$ oder $P \notin g$ (Man nennt die so entstandene Struktur $\in$ eine Inzidenzstruktur). Häufig sind für $\in$ die folgenden Axiome zu beobachten:

A1 Zu zwei verschiedenen Punkten P und Q gibt es genau eine inzidente Gerade g, d.h. eine Gerade durch P und Q.

A2 Es gibt 4 Punkte, von denen keine drei gemeinsam auf einer Geraden liegen.

Wir werden im folgenden erkennen, daß es äußerst verschiedene Modelle hierzu gibt. Kommt das Axiom A3 hinzu, so spricht man von einer *affinen Ebene*:

---

[1]) Dieser Vortrag kann Stoff für mathematische Vertretungsstunden und Stunden vor den Ferien liefern. Der didaktische Hintergrund des Vortrags wird Thema eines gleichlautenden Vortrags auf der Bundestagung für Didaktik der Mathematik an der TU Aachen 1986 sein.