M A T H E M A T I K I N F O R M A T I O N
GYMNASIUM STARNBERG
FACHBEREICH MATHEMATIK

NR. 16
15. Februar 1985

MATHEMATIKSEMINARNACHMITTAG AM 18.12.1984 AM GYMNASIUM STARNBERG

Langsam wird das Mathematikseminar des Gymnasiums Starnberg zur Gewohnheit. Eigentlich sollte ein Seminarnachmittag bereits im Juli stattfinden; allzugroße Hektik am Schuljahresschluß verhinderte aber die Durchführung guter Absichten. So fand der Nachmittag fast genau auf den Tag wie vor einem Jahr im Dezember statt. Auch wenn für den Nachmittag schon Wochen vorher im Schulhaus plakatiert war und die im folgenden wiedergegebene Aufgabe, die die Schüler als Vorbereitung vor dem Seminar selbst lösen sollten, manches Kopfzerbrechen verursachte, so hielt sich der Andrang zum Seminar in Grenzen. Vor allem die Kollegiaten, die im Augenblick mehr als die Hälfte der Teilnehmer stellen, wollten ihren regulären Nachmittagsunterricht nicht versäumen. Alle aber stimmten zu, daß auch 1985 ein Seminar stattfinden soll. Ort, Zeit und Organisator stehen im Augenblick noch nicht fest, da zu viele Aktivitäten des Fachbereichs Mathematik die Lehrer zu sehr belasten.

Hausaufgabe auf den 18.12.1984:

Fünf Männer sammelten einen Berg Kokusnüsse. Nachts schlafen sie neben dem Berg. Der 1.Mann wacht auf und befürchtet, daß er bestohlen werden könne; deshalb versucht er seinen Anteil, ein Fünftel, zu retten. Er zählt die Kokusnüsse und stellt fest, daß ihre Gesamtzahl nur durch 5 teilbar ist, wenn er eine Kokusnuß vergräbt; dann holt er sich seinen Anteil, versteckt ihn und schläft wieder ein.
Der 2.Mann erwacht, fürchtet dasselbe, zählt, stellt abermals fest, nur wenn er eine Nuß vergräbt, bleibt eine durch 5 teilbare Zahl. Vom Rest holt er sich seinen vermeintlichen Anteil, versteckt ihn und schläft wieder ein.
Alle 5 Männer führen in dieser Nacht den beschriebenen Algorithmus aus. Als sie am Morgen erwachen, wundern sie sich über den Restberg von Kokusnüssen.

FRAGE: Ist dieses Problem überhaupt mit natürlichen Zahlen lösbar?

Reichert, OStR.

Ws folgt die Dokumentation des Mathematikseminarnachmittags am 18.12.1984

Teilnehmer:
Leitung: Dr. Karlhorst Meyer, StD.
weitere Vortragende: Peter Smolka, OStR.
Bernd Ulitzka, OStR.

Statistik der beteiligten 17 Schülerinnen und Schüler:

Jahrgangsstufe	9	10	11	K12	K13
Mädchen	0	0	0	3	
Buben	0	2	1	11	

Beginn: 13.30
Ende: 17.30

Dr. Meyer

Die neuen Aufgabe des Bundeswettbewerbs Mathematik 1985

Aufgabe 1:
Vierundsechzig Spielwürfel gleicher Größe mit den Augenzahlen „Eins" bis „Sechs" werden auf einen Tisch geschüttet und zu einem Quadrat mit acht waagerechten und acht senkrechten Würfelreihen zusammengeschoben. Durch Drehen der Würfel, unter Beibehaltung ihres Platzes, soll erreicht werden, daß schließlich bei allen vierundsechzig Würfeln die „Eins" nach oben zeigt. Die Würfel dürfen jedoch nicht einzeln gedreht werden, sondern es ist nur erlaubt, jeweils alle acht Würfel einer waagerechten oder senkrechten Reihe gemeinsam um 90° um die Längsachse dieser Reihe zu drehen.
Man beweise, daß es stets möglich ist, die Würfel durch mehrfaches Anwenden der erlaubten Drehungsart in die geforderte Endlage zu bringen.

Aufgabe 2:
Man beweise, daß in jedem Dreieck für jede seiner Höhen gilt:
Projiziert man den Fußpunkt der Höhe senkrecht auf die beiden anderen Höhen und die zugehörigen Seiten, so liegen die vier Bildpunkte auf einer Geraden.

Aufgabe 3:
Ausgehend von der Folge $F_1 = (1, 2, 3, 4, \ldots)$ der natürlichen Zahlen werden weitere Folgen $F_2, F_3, F_4, \ldots$ nach folgender Vorschrift gebildet:
F_{n+1} entsteht aus F_n, indem unter Beibehaltung der Reihenfolge zu den durch n teilbaren Gliedern von F_n jeweils 1 addiert wird, während die übrigen Glieder unverändert übernommen werden.
So erhält man z. B.: $F_2 = (2, 3, 4, 5, \ldots)$ und $F_3 = (3, 3, 5, 5, \ldots)$.
Man bestimme alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, daß genau die ersten n-1 Glieder von F_n den Wert n haben.

Aufgabe 4:
Jeder Punkt des dreidimensionalen Raumes wird mit genau einer der Farben Rot, Grün, Blau gefärbt. Die Mengen R bzw. G bzw. B bestehen aus den Längen derjenigen Strecken im Raum, deren beide Endpunkte gleichfarbig rot bzw. grün bzw. blau gefärbt sind.
Man zeige, daß mindestens eine dieser drei Mengen alle nichtnegativen reellen Zahlen enthält.

Hierzu wurden die folgenden Hinweise gegeben, die bereits am Vormittag an alle Schüler der Klassen 9 mit 13 als "Anreiz" ausgeteilt wurden:

zu Aufgabe 1: Wer den Zauberwürfel beherrscht - und das sind viele - wird sofort ein Lösungsverfahren durch Probieren haben; also geht es nur noch um eine beweiskräftige Formulierung.

zu Aufgabe 2: Eigentlich behauptet der Satz zu viel; zweckmäßigerweise beschränkt man sich auf weniger. Dann muß man wissen: Man erhält die senkrechte Projektion eines Punktes P auf eine Gerade g, wenn man von P das Lot auf g fällt; der Lotfußpunkt P' heißt dann senkrechte Projektion von P auf g. Eine Lösung ist bereits bekannt; man geht hierbei davon aus, daß die Punkte $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, $(x_3;y_3)$ - in einem Koordinatensystem gegeben - auf einer Geraden liegen, wenn sie die folgenden Bedingung erfüllen:
$(y_1 - y_2):(x_1 - x_2) = (y_3 - y_2):(x_3 - x_2)$; dies ist nichts anderes als der Strahlensatz. Dann braucht man noch einige Kenntnisse aus der Jahrgangsstufe 9: Satz des Pythagoras, Euklid, Strahlensatz, ähnliche Dreiecke in einem rechtwinkeligen Dreieck; zwei Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind gleich. Geeignet gemischt, viel Geduld und algebraisches Können und die Lösung findet sich von selbst.

zu Aufgabe 3: Wie immer lohnt es sich, die verlangten Zahlenreihen zu konstruieren. Sicher findet ihr einen Computerfan, der Euch die Zahlenreihen hochrechnet; so könnt Ihr sicher die Behauptung, die Ihr braucht, erraten:

F_1:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
F_2:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Lösung n = 2
F_3:	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11	Lösung n = 3
F_4:	4	4	5	5	7	7	10	10	11	11	
F_5:	5	5	5	5	7	7	10	10	11	11	Lösung n = 5
F_6:	6	6	6	6	7	7	11	11	11	11	
F_7:	7	7	7	7	7	7	11	11	11	11	Lösung n = 7

Warum heißt die nächste Lösung n = 11?

zu Aufgabe 4 wurden keine Angaben gemacht.