M A T H E M A T I K I N F O R M A T I O N
GYMNASIUM STARNBERG
FACHBEREICH MATHEMATIK NR. 15
27. 7. 1984

Dr. Karlhorst Meyer

Methoden zur Einführung und Nutzung des pythagoreischen Lehrsatzes [1])

0. Einleitung:

Der vorliegende Artikel wurde für die Hauptschule geschrieben, um deren eigene Methoden beim Lehrsatz des PYTHAGORAS (um 500 v.Chr., siehe auch V.D.WAERDEN [8]) zu nutzen; doch ist anzunehmen, daß insbesondere der Methodenvergleich im folgenden auch der Realschule und dem Gymnasium von Nutzen sein kann. Als Lehrer weiß ich, daß es dem Kollegen wenig hilft, wenn ich ihm Grundsätzliches für das Auffinden einer für den betreffenden Schulzweig adäquaten Methode in die Hand gebe, denn ihm fehlt es in der Regel an der Zeit, den erforderlichen Transfer zu seiner Unterrichtsstunde herzustellen; es fehlt ihm aber auch an der hierzu erforderlichen Literatur. Deshalb fordert der Autor seit Jahren Zeitschriften, die voll ausgebaute Unterrichtseinheiten dem Lehrer zum Ausprobieren anbieten; sollten sich so neue Ideen bewähren, so kann man sie anschließend in neue Bücher aufnehmen, eventuell auch in Lehrpläne. Versuche des Ehrenwirth-Verlags in München [2] können in diesem Sinn gelobt werden. Ausgehend von einem Tagungsvortrag ist es aber leider nicht möglich, alle denkbaren Methoden so ausführlich darzustellen, wie soeben postuliert wurde. Um zu straffen, folgt ein Überblick, der im einzelnen zu behandeln versucht:

0.1 Warum muß der Hauptschüler sich mit dem Lehrsatz des Pythagoras befassen, kann er dies überhaupt?

0.2 Welche Einstiege bieten sich seitens der Mathematik an, wie ist zu motivieren.

0.3 Ist an der Hauptschule ein Beweis erforderlich?

0.4 Welche Beweise sind für die Hauptschule geeignet.

0.5 Was ist der historische Hintergrund!

0.6 Wozu braucht man den Lehrsatz des PYTHAGORAS.

Dieser scheinbar logische Zusammenhang kann im folgenden nicht eingehalten werden, weil dem Autor die Frage 0.4 zentral zu sein scheint. Hierzu eine

1. Vorbemerkung:

Schüler oft, Lehrer gelegentlich, fürchten sich vor dem Beweisen in der Mathematik. In Wirklichkeit aber werden zumindest an den allgemeinbildenden Schulen gar keine Beweise im mathematisch strengen Sinn geführt. In der Regel begründen wir nur; es sei denn, daß wir von einer Familie von Axiomen unter Einhaltung eines Pakets streng logischer Aussagen mit einer strengen Schreibweise (Mengenlehre!) deduzieren und so sicher sind, daß wir keine logischen Lücken gelassen haben. Aus pädagogischen Gründen lehnen wir dies aber meist ab. Was dann der Terminus

[1]) gleichnamiger Vortrag auf der 1. Kurztagung für Didaktik der Geometrie 28.-29.9.1984 an der Technischen Universität München.

"Beweis" an der allgemeinbildenden Schule bedeutet, wurde viel diskutiert. Wir verweisen in diesem Zusammenhang nur auf [3]. Kurz zusammengefaßt: Viele Didaktiker haben erkannt, daß das schwerfällige Beweisen meist für Schüler langweilig ist und wohl mehr der forschenden Mathematik vornehmlich im Grundlagenbereich vorbehalten bleiben sollte und wohl in der Regel an allgemeinbildenden Schulen, insbesondere an der Hauptschule nichts zu suchen hat. Doch auch an der Hauptschule geht es im Mathematikunterricht um das Aneinanderreihen logischer Blöcke unter Einhaltung der Gesetze der Logik. Gepflegt sollte dies vor allem dort werden, wo der gesunde Verstand nicht ausreicht, Lösungen - und zwar alle - sofort zu erkennen. Dann nämlich sind wir gehalten, uns eine Lösungsstrategie zu bauen. Dies muß vor allem anhand eines geeigneten Beispielmaterials laufend geübt werden, dies ist u.U. die Hauptaufgabe des Mathematikunterrichts In der Regel sagen wir hierzu "Lösen", z.B."Lösen von Gleichungen", "ausrechnen", "begründen", gelegentlich auch "beweisen", was durchaus nicht streng zu sein braucht. Lehren können wir bis heute dies alles nur dadurch, daß wir dem Schüler immer wieder Beispiele vorführen.

Nun ist der Lehrsatz des PYTHAGORAS ein sehr wichtiger Satz der Geometrie, der auch sehr tiefliegend ist und deshalb der von ihm beschriebene Zusammenhang nicht ohne weiteres begreifbar. D.h. auch in seinem Anwendungsaufgaben, bei denen niemand bezweifelt, daß sie auch an der Hauptschule erforderlich sind, wird er tiefliegende Zusammenhänge herstellen, deren Begründung naturgemäß die Elemente seines eigenen Beweises tragen werden. So komme ich zu der Ansicht, wenn ich an der Hauptschule den Satz anwenden will, mit ihm begründen will, muß ich als ein erstes Beispiel mir seine Begründung zurechtlegen. Welche Möglichkeiten es hierzu gibt, wird deutlich, wenn man sich die Vielfalt der Beweise näher ansieht.

2. Die Beweise des Lehrsatzes des PYTHAGORAS und ihre Voraussetzungen:

Im folgenden werden vor allem die Beweise bei LIETZMANN [4] diskutiert:

Alle Beweise gehen irgendwie mit *Flächenberechnungen* oder der Lehrsatz erscheint als *Postulat in einer affinen Geometrie*, z.B. wodurch dann Längen definiert und abermals Flächeninhalte deduzierbar werden. Letzterer Standpunkt ist grundlagentheoretisch sauber, für die Allgemeinschule ungeeignet, weil er zu lang, zu unanschaulich ist und nicht mit einem hinreichend umfangreichen Übungsmaterial bis heute versehen ist. Deshalb ist vor der Behandlung des Lehrsatzes Flächenberechnung unerläßlich: Flächeninhalt von Rechteck, Parallelogramm, Trapez, Dreieck, Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit müssen dem Schüler geläufig sein, ebenso das damit verbundene algebraische Kalkül, zumindest die Fähigkeit des Einsetzens von Zahlen in Formeln.

Die Beweise bei LIETZMANN gliedern sich in

2.1 Beweise, die auf algebraische Kenntnisse aufbauen.

2.2 Beweise, die allein auf der Zerlegungsgleichheit der Flächen und Adäquatem beruhen. Betrachtet man nur ganz grob einmal die Beweisfiguren bei LIETZMANN (siehe Abbildungstafeln 1 bis 3), so erkennt man sehr schnell, daß die meisten Figuren für die Schule zu verwirrend sind, also für den Unterricht ausscheiden. Innerhalb der Zerlegungsbeweise stellt LIETZMANN die Frage nach dem einfachsten Beweis, eine Frage, die auch für uns von Interesse ist:

Leider ist LIETZMANN hier zu sehr Grundlagenmathematiker und zu wenig Pädagoge als daß er sich bewußt wird, daß er erst einmal diskutieren müßte, was *e i n f a c h* hierbei bedeuten soll. Für LIETZMANN sind offenbar Quadrate, Vierecke mathematisch schwieriger als Dreiecke. Also erhebt sich für ihn nur die Frage, welche Überlegung ist die einfachste, die allein unter Benutzung von Dreieckszerlegungen den Satz beweisen kann. Die Antwort ist naheliegend: Der einfachste Beweis benutzt die kleinste Anzahl von Dreiecken. BRANDES [4] hat bewiesen, daß diese Minimalzahl aus mathematischen Erwägungen heraus 7 sein muß; hierfür gibt es einen Beweis von ANNAIRIZI (900 n.Chr. vergl. Abb. 6). Beim vielleicht jüngsten Beweis von BUTH [1] Abb. 9 ist diese Zahl 11.

Meines Erachtens ist dieser Weg zur Bestimmung der Einfachheit eine Sackgasse, wenngleich mathematisch interessant. Schüler, selbst Gymnasiasten können sich nie und nimmer merken, wie die Linien bei den einzelnen Triangulierungen gelegt wurden. Hier braucht man andere Kriterien:
Der Beweis von BUTH kann sicher spielerisch im Unterricht durchgeführt werden und gibt dem Schüler auch das Gefühl, daß es sich hierbei um einen wahren Sachverhalt beim Ergebnis handelt; doch scheint mir unberücksichtigt, daß der Schüler darüber hinaus an einem besserem Beispiel hätte lernen können, wie man eine Lösungsstrategie findet und sich die Strategie merkt. Da wir aber bis heute nur in der Lage sind, das Finden von Strategien durch Vorführen geeigneter Beispiele dem Schüler zu lehren, wir aber dann darauf angewiesen sind, die Strategie so aufzubereiten, daß eine Chance besteht, daß sich der Schüler die Strategie merken kann, ist sicher bei BUTH die Chance verspielt. Wir wollen an der Schule keinen Gesamtaufbau der Geometrie anstreben, aber wir wollen laufend im Unterricht den Schüler im Denken und Merken schulen; deshalb glaube ich:

2.3 eine Beweisfigur muß einfach sein im Sinne von LIETZMANN, wobei ich als Maß der Einfachheit aus meiner eigenen pädagogischen Erfahrung heraus die Anzahl der beteiligten Strecken nennen möchte.

2.4 eine Beweisfigur muß einprägsam sein; ein Maß hierfür kann der Grad der Symmetrie der Figur sein.

Ich kann hierfür auch keine logischen Gründe angeben und schon gleich nicht beweisen, daß die Figur, die ich auswähle, im Sinne von 2.3 und 2.4 optimal ist.

Betrachtet man unter diesen Gesichtspunkten die Tafeln 1 bis 3, so fällt Abbildung 11 auf:

2.5 Satz: Das große Quadrat der Abb.11 setzt sich aus 4 gleichgroßen Dreiecken und einem Restquadrat zusammen.

Die folgenden zwei Zugänge führen hieraus zum Satz des PYTHAGORAS:

2.6 algebraischer Weg: Aus 2.3 folgt
$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2$. Nach der binomischen Formel folgt hieraus:
$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2$ oder $a^2 + b^2 = c^2$.

Ich bezweifle, ob dieser Weg an der Hauptschule möglich ist, auch wenn er dem Mathematiker verblüffend einfach erscheint; denn er setzt voraus:

a) Fähigkeiten im Umgang mit Buchstaben,
b) Beherrschung der binomischen Formel,
c) Flächengleichheit durch Zerlegen,
d) Flächenberechnung für Quadrat und Dreieck.

Der Lehrer wird kaum unmittelbar vor dem Lehrsatz des PYTHAGORAS im Unterricht in der Lage sein, dies alles hinreichend gut zu wiederholen. Deshalb neige ich mehr zu

2.7 geometrischer Weg: Aus 2.5 folgt durch Verschieben der Dreiecke der Abbildung 11 die Abbildung 12. So ergibt sich $F_I + F_{II} = F_{III}$ ohne Algebra!

Freilich, beide Wege sind mathematischer Schwindel! Wir haben vergessen zu beweisen, daß I, II, III Quadrate und die Translationen (Verschiebungen) möglich sind. Das gymnasiale Arbeitsblatt Tafel 4 füllt die Lücken durch den Arbeitsstil "comics".

Ich wollte dies in [7] darstellen, zudem der Film diese Lücken auch ließ, aber die Redaktion schnitt den Beweis versehentlich mit der Schere entzwei und klebte ihn wieder sinnlos. Für die Hauptschule halte ich das Schließen dieser Lücken für n i c h t e r f o r d e r l i c h . Eine einzige Ausnahme würde den Lehrer (der selbstverständlich von den Lücken wissen muß und sie auch beheben können sollte) zur Wahrheit zwingen:Ein Schüler erkennt eine dieser Lücken.

Unterrichtsvoraussetzung wäre auch hier eine geeignete, vorherige Wiederholung der *Flächengleichheit durch Zerlegen*.

2.8 Der Satz des EUKLID und der Höhensatz sind zum Satz des PYTHAGORAS algebraisch äquivalent, d.h. durch Lösen von Gleichungssystemen kann man jeweils aus dem einen den anderen herleiten. Dies stellt man im gymnasialen Unterricht heraus, doch für die Hauptschule ist dies überflüssig. Zu viele Sätze verwirren nur.

3. Vorkenntnisse, Sprachbarrieren

3.1 Durch Auswahl geeigneter Methoden wird der Lehrer die Vorkenntnisse möglichst klein halten und vor dem Beweis des Pythagoras geeignet wiederholen und vertiefen. Beschränke ich mich auf 2.7, so heißt dies, daß die Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit von Flächen in vielen puzzle-Spielen vorher eingehend geübt sein muß, aber auch die Eigenschaften von Quadraten und Rechtecken hierbei betont werden. Gemessen an herkömmlichen Unterrichtswerken wird hier viel eigenständige, zeitraubende Vorbereitungsarbeit vom Lehrer erwartet, auch Einfallsreichtum.

3.2 Mathematik ist weitgehend eine Sprache der Logik; ich bin mir hier durchaus bewußt, daß Hauptschulklassen besonders heterogen sind, zu dem die Schüler in der Regel ihre Umgangssprache nicht frei handhaben können; deshalb muß meines Erachtens der Lehrer zweierlei bedenken:

3.2.1 Lehrer dürfen nicht müde werden, den sprachlichen Ausdruck ihrer Schüler zu fördern; dies gilt auch im Bereich Geometrie: Er muß versuchen, den Schüler zum Reden zu bringen, um aus ihm herauszulocken, was sich dieser denkt.

3.2.2 Bei Hauptschülern insbesondere wird dies nicht immer möglich sein. Die Erfahrung zeigt, daß Schüler Geometrie auch lernen können, ohne sie beschreiben zu können. Der Lehrer steht also vor der Schwierigkeit, einerseits nicht im sprachlichen Formalismus stecken zu bleiben, andererseits aber doch durch Raffinesse und Rückfragen sich laufend zu vergewissern, ob er verstanden wurde. Hier ist eine Gedankenlücke, die der Autor in seinem eigenen Unterricht zwar intuitiv zu schließen hofft, aber noch nicht analysieren kann, ob ihm dies gelingt, und wenn ja, mit welcher Methode er arbeitet.

4. Motivation, Einführung des Satzes, Geschichte des Satzes

In 2. wurde gezeigt, weshalb man das Gespräch über den Satz des PYTHAGORAS nicht mit den Möglichkeiten der Motivation beginnen kann. In [6] wird der Schüler durch ein Beispiel motiviert: Es bietet sich hierfür eine Anwendungsaufgabe an: Wie lang muß ein Gratsparren sein, damit die Maße einer Kirchturmspitze eingehalten werden, oder man läßt einfach die Quadrate über den Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks nach ihrem Flächeninhalt auszählen, wie dies in vielen Lehrbüchern geschieht.
Heute ist im Hinblick auf das große Interesse, das die Geschichte der Naturwissenschaften genießt, ein solcher Weg sicher zu wenig. PYTHAGORAS und die Pythagoräer waren interessante Leute (vergl. V.D.WAERDEN [8], LIETZMANN [4], MEYER u.a.[7]), die vor 2500 Jahren in Süditalien lebten, wie der Norddeutsche Rundfunk in seiner Schulfernsehreihe: "Geschichten über Mathematik" amüsant zu berichten weiß; sie haben nicht nur Mathematik und Geometrie gemacht. Deshalb würde ich meinen Unterricht damit beginnen,

daß ich über diese Leute erzähle, daß uns der Satz zuerst durch die altägyptische Darstellung Abb. 2 auffiel, daß wir lange Zeit glaubten, die Pythagoräer wären die ersten gewesen, die ihn bewiesen haben, daß EUKLID diesen Satz im ersten Geometrielehrbuch der Welt (?) beschrieben hat, daß noch 100 Jahre vorher, EUKLID für diesen "Verrat" hätte sterben müssen wie andere Pythagoräer, daß wir heute annehmen, daß zuerst die Sumerer einen Beweis kannten, vielleicht aber auch Inder oder Chinesen. Aus diesen Gründen sind in den Tafeln 1 bis 3 jeweils geschichtliche Daten angegeben. Man beachte nur: Der historische Abriß bleibt im Unterricht interessantes und amüsantes Vehikel und wird nicht Selbstzweck.

5. Eselsbrücken zum Merken des Satzes

Abbildung 11 ist sehr einprägsam, aus ihr heraus läßt sich der Satz formulieren. Die Schülerzeichnungen aus LIETZMANN [4] (siehe Abb.1) tun dies auch, ebenso die Formel $a^2 + b^2 = c^2$. Dies alles sind Eselsbrücken, aus denen heraus der Satz sprachlich zu formulieren ist:

Satz des PYTHAGORAS: Die drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks haben die folgende Eigenschaft: Das Quadrat über der längsten Seite ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten.

Man darf auch die Umkehrung, die zu Abb. 2 einst führte, nicht vergessen:

Umkehrung des Satzes: Hat man ein Dreieck mit Seiten für die gilt: Das Quadrat über der längsten Seite ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, so ist das Dreieck rechtwinkelig.

Dem Schüler sollte anhand von Beispielen klar gemacht werden, daß das Hauptanliegen des Satzes der Einstieg in die Berechnung geometrischer Gebilde ist. Hier zeigt sich auch, daß man dann den "anderen Satz" der Rechnung, den Vierstreckensatz, an der Hauptschule behandeln sollte, wenn man sich für den PYTHAGORAS entschieden hat.

6. Der Nutzen des Satzes des PYTHAGORAS:

Hier wird nur auf [5] und [6] verwiesen, wo man auch Beispiele aus Anwendungen findet.

7. Notwendigkeiten, den Satz an der Hauptschule zu behandeln:

Sicher spielt hierbei keine Rolle, daß der Satz die Metrik der EUKLIDischen Geometrie definiert, also für die Grundlagen der Geomtrie fundamental ist. Schulisch hat der Satz ganz allgemein - und nicht nur an der Hauptschule - seine Bedeutung im Einstieg in die geometrische Berechnung.
Will man neben dem Inhalt von Flächen und Volumen auch andere Rechnungen in Geometrie durchführen, so muß man den Satz des PYTHAGORAS und den Vierstrecken- oder Strahlensatz beherrschen. Aus diesem Grund bin ich der Meinung, daß nur einer der beiden Sätze, an der Hauptschule gelehrt, Flickwerk ist. Alle Berechnungen, auch im Dreidimensionalen, lassen sich auf diese beiden Sätze zurückführen. Man darf natürlich hier nicht vergessen, daß gerade die Anwendung des Satzes eine gute Portion Kenntnisse der Algebra voraussetzt: *Sicherheit im Gebrauch der Quadratwurzel*. Auch hier gilt wie oben, daß das vom Gymnasium aufbereitete Material einschließlich der Übungsbeispiele für die Hauptschule dringend einer grundlegenden Überarbeitung bedarf. Es geht nicht nur um das Prinzip der geometrischen Rechnung, es ist auch eine 6000-jährige Geschichte, die den Satz als Bildungsziel der Hauptschule leuchten läßt. Wichtig ist auch, daß der Hauptschüler einmal hört, daß erst durch den Satz Berechnungen in der EDV möglich werden. Ein automatischer Flug, die Mondlandung wäre

ohne dem laufenden Ergänzen geometrischer Zusammenhänge durch Berechnungen auch mit dem Satz im Computer undenkbar.

Aber auch viele Handwerksberufe kommen ohne diesen Satz nicht aus:
metallverarbeitende Berufe: Schlosser, Mechaniker usw.
bauhandwerkliche Berufe: Zimmermann, Maurer, Tiefbauer usw.

Im Hinblick auf die freie Berufswahl der Hauptschüler ergibt sich die Notwendigkeit, auch an der Hauptschule mit diesem Satz die rechnerische Geometrie zu beginnen. Die Berufsschule ist hierfür zu spät, der zweite Anlauf dort ist eine notwendige Wiederholung, und die dann der Mathematik zur Verfügung gestellte Unterrichtszeit für einen ersten Anlauf zu knapp bemessen.

8. Literatur:

[1] Buth, Manfred: Operative Deutung einer Äquivalenzrelation am Beispiel der Flächenmessung, math.did.6, 29 (1983)

[2] Ehrenwirth, Hauptschulmagazin, z.B.
Wöckel, Helmut: Der Höhen- und Kathetensatz, Seite 49-52, 8 (1978)

[3] Dörfler, Fischer: Beweisen im Mathematikunterricht, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1978

[4] Lietzmann, W.: Der PYTHAGOREische Lehrsatz, Teubner Leipzig 1951

[5] Meyer, Kh.: Algebra und Geometrie, Hirschgraben Frankfurt 1980

[6] Behandlung des pythagoreischen Lehrsatzes, Vortrag 1980 an der Universität Erlangen

[7] MEYER, ULITZKA, HONAL: Geschichten über Mathematik, Kritik und Beschreibung der Schulfernsehfilme:
I. Auf der Suche nach dem Gesetz oder Thales von Milet,
II. Auf dem Weg zum Beweis oder Thales von Milet, 2.Teil
III. Harmonie und Mathematik oder Pythagoras vonSamos,
IV. Der Satz oder Pythagoras von Samos, 2.Teil
BR Schulfernsehen Heft 4 1983 Seite 53-62

[8] Van der Waerden: Die Pythagoräer, Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft, Artemis Zürich und München 1979.

Anschrift des Autors:
Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
8014 Neubiberg

Additions-und Subtraktionsbweise:

BHASKARA 1114 v.Chr.
vermutlich:
China um 1000 v.Chr.

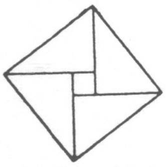


Abb.10

vermutlich:
SUMER 3000 v.Chr.

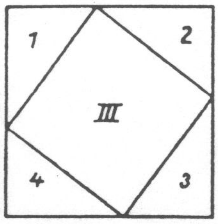


Abb.11

zur Vermeidung von
Arithmetik

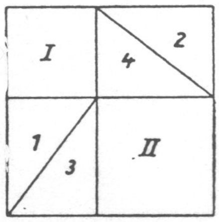
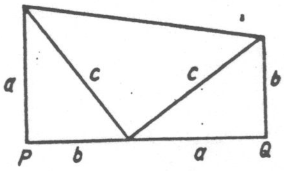


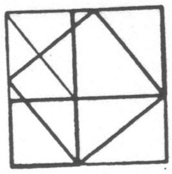
Abb.12

Konsequenzen

GARFIELD 1882



analog ANNAIRIZI



Brautstühle 900 n.Chr. u.U. älter

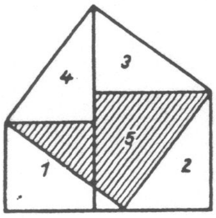


Abb.13

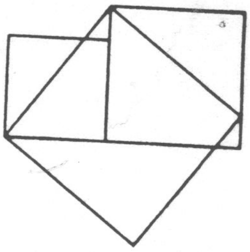


Abb.14

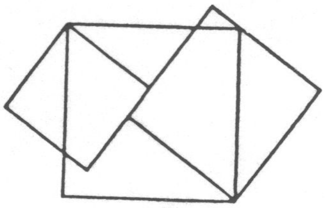


Abb.15

bei LIETZMANN [ ]:

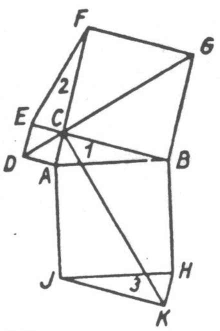


Abb.16

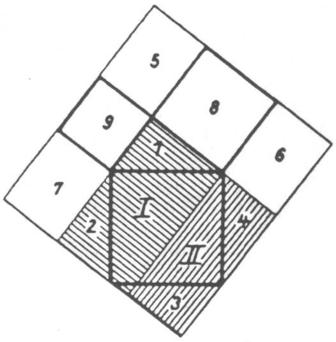


Abb.17

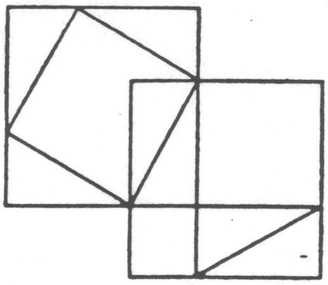


Abb.18

Beweise über den Satz v. EUKLID 300 v.Chr.:

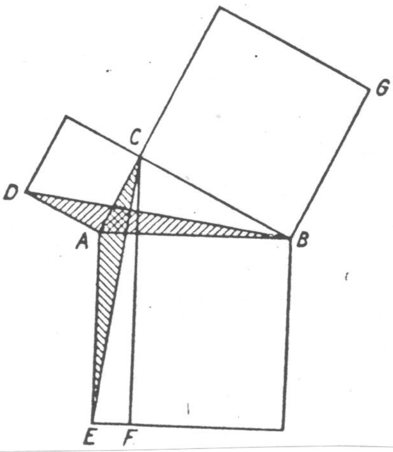


Abb.19

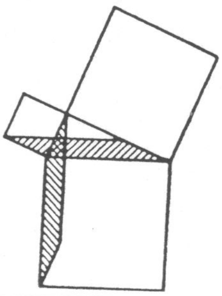


Abb.20

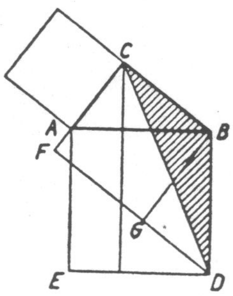


Abb. 21

Tafel 1

Eselsbrücken nach LIETZMANN [ ]:

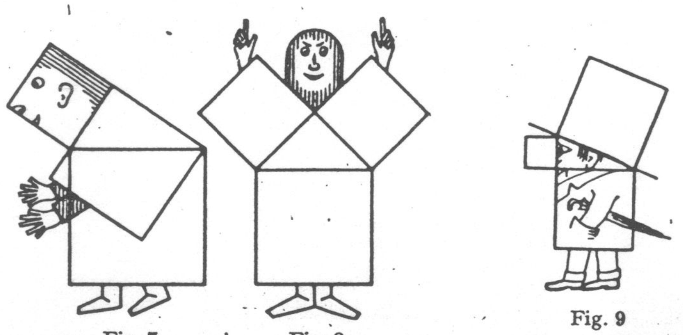


Fig. 7 Fig. 8
(Schülerzeichnungen)

Fig. 9
(Aus einem Rechenbuch von Hanft)

Abb.1

Ägypten unter König AMENEMHAT I 2300vChr.
(Papyrus 6619 Berlin)

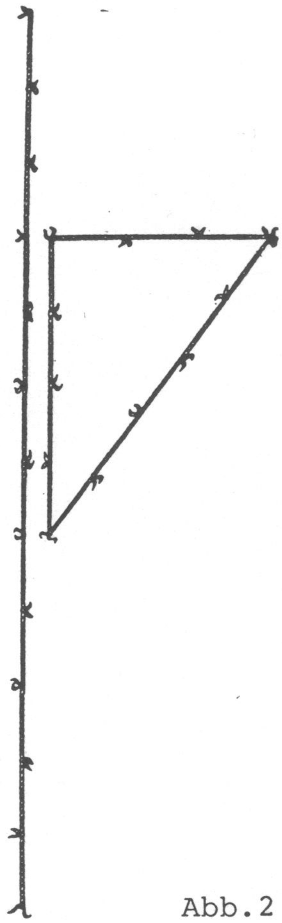


Abb.2

Zerlegungsbeweise

EPSTEIN

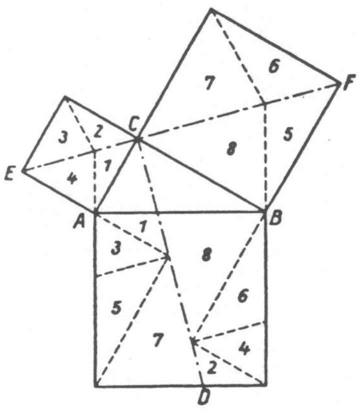


Abb.3

NIELSEN

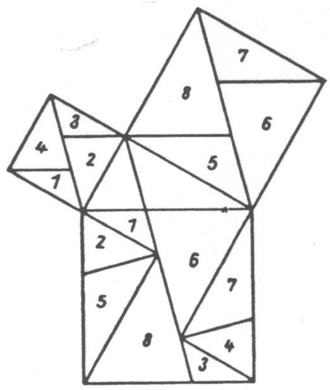


Abb.4

GUTHEIL

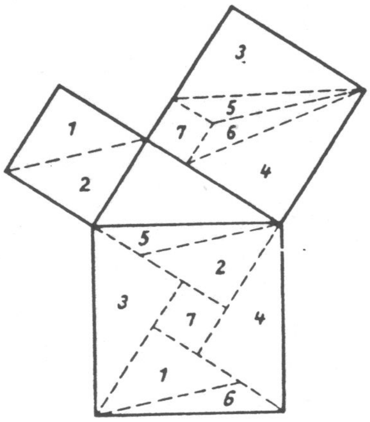


Abb.5

GÖPEL 1824
ANNAIRIZI 900nChr.

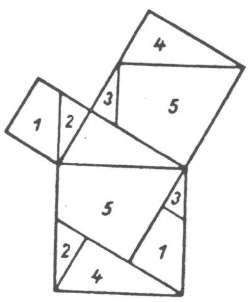


Abb.6

PERIGALsches Schaufelrad

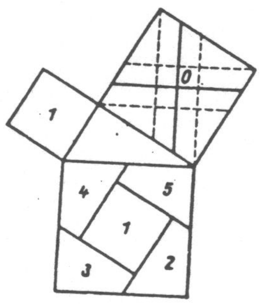


Abb.7

Tafel 2

Verschiebungsbeweise:

BÖTTCHER

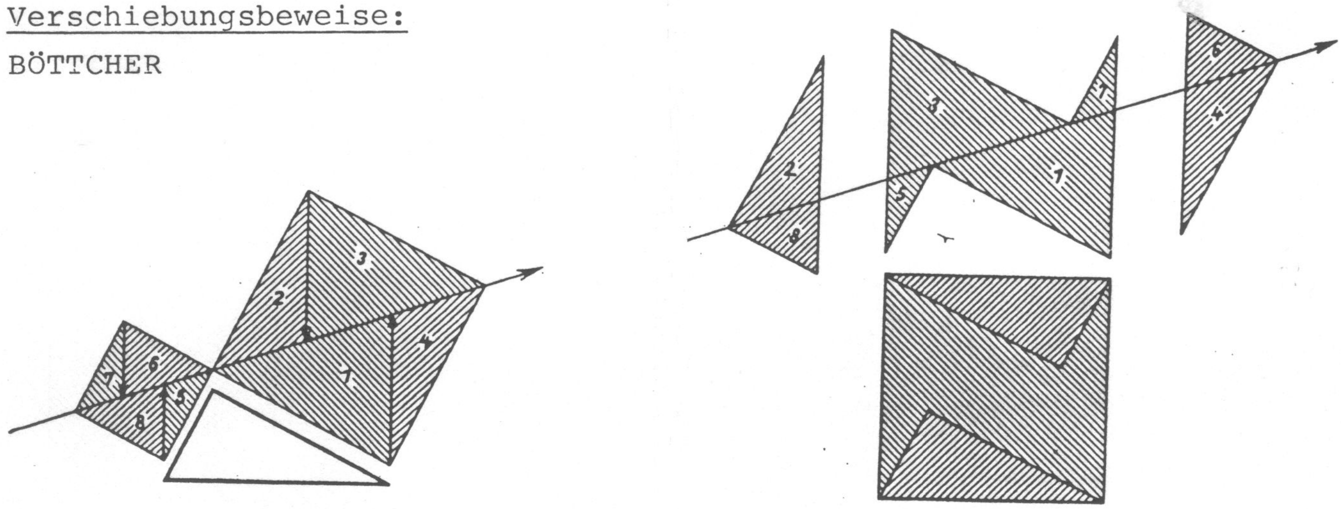


Abb.8

BUTH 1983 math.did.6,29 Seite29-43

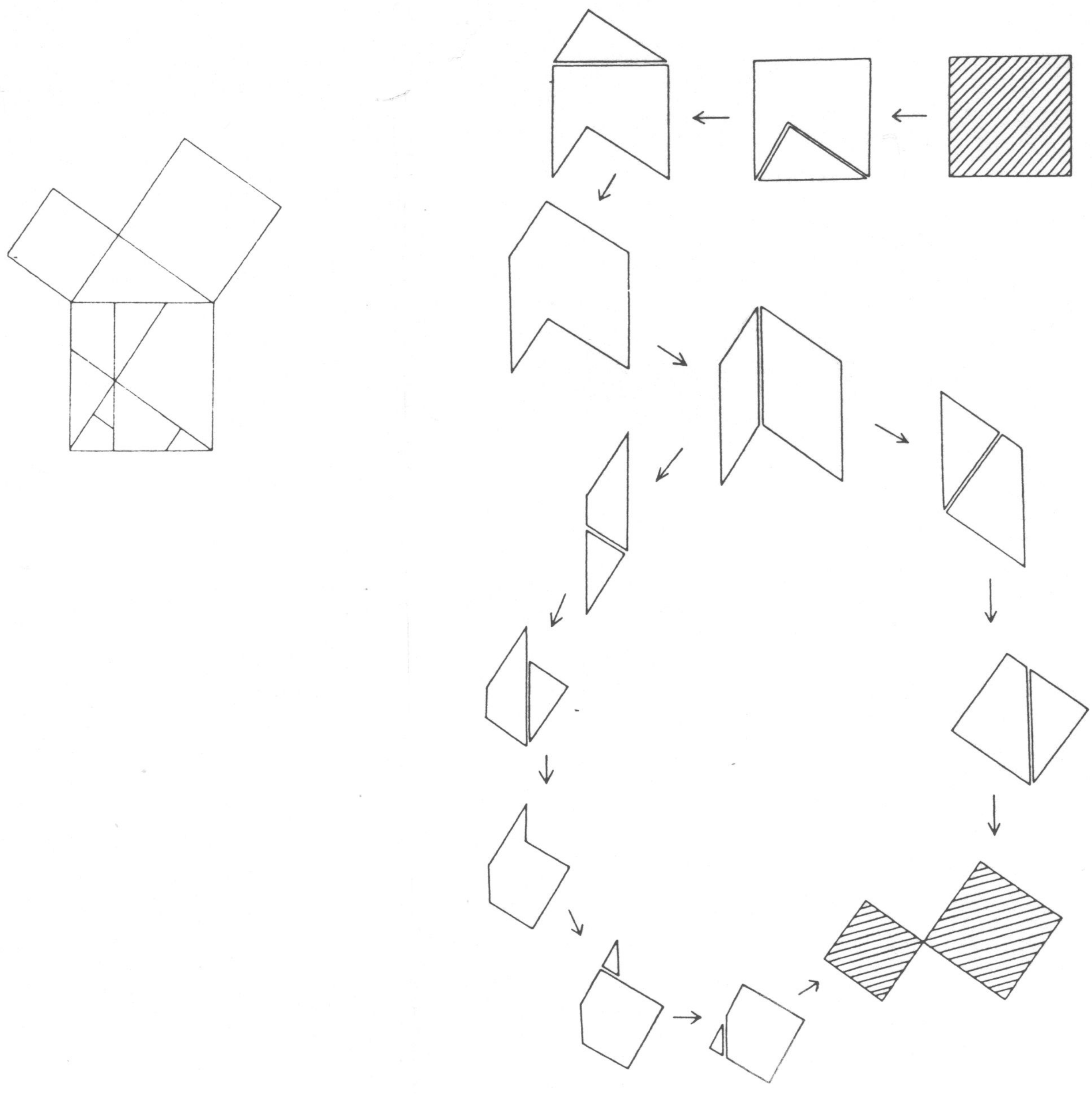
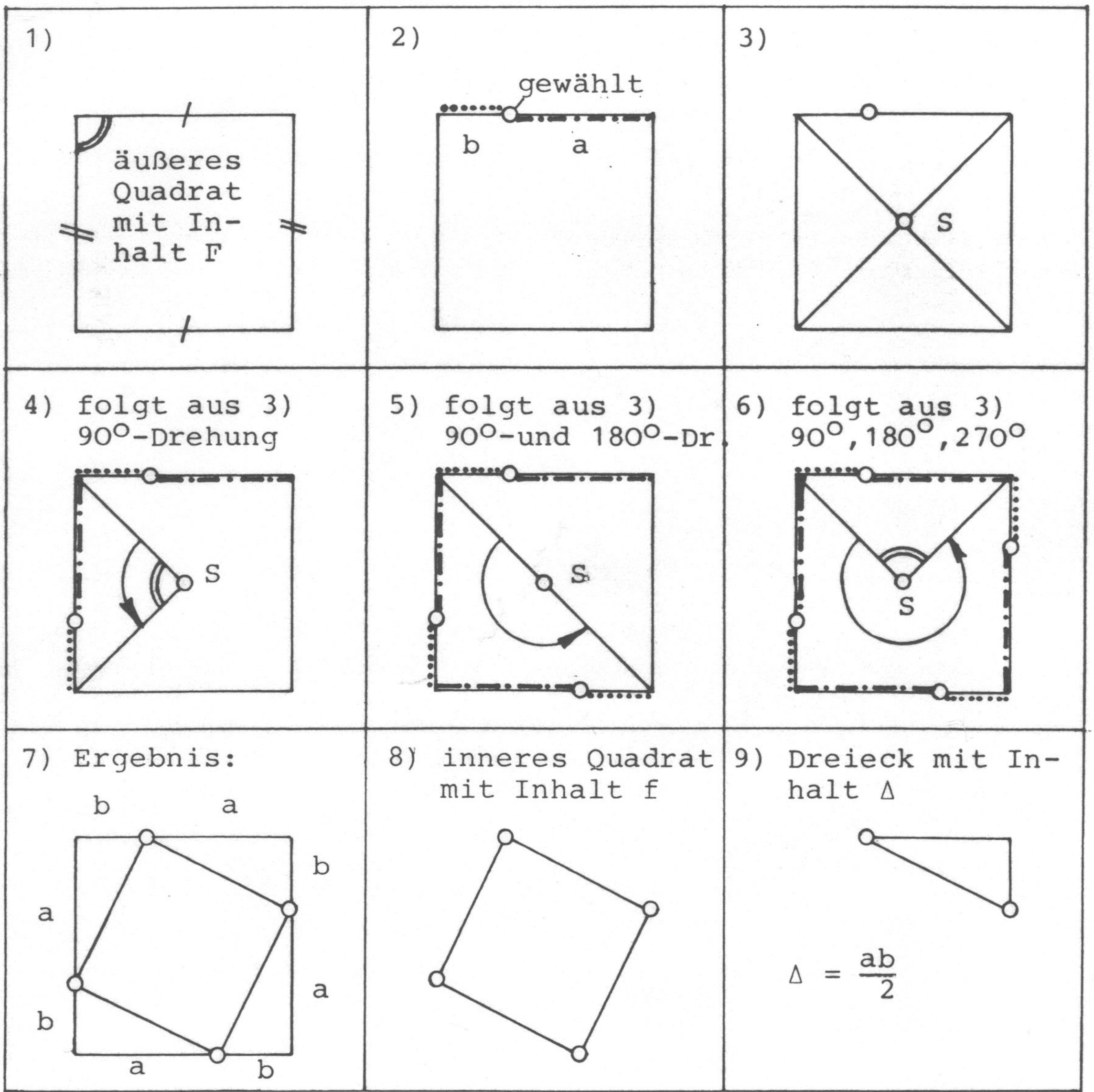


Abb.9



Aus 7), 8) und 9) folgt:

$$F = (a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \quad \text{oder}$$

$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

also: $$c^2 = a^2 + b^2$$