Kurzdarstellung der Inhalte des Mathematikseminars:

Heimo Gnilka:

<u>Über Ungleichungen</u>

Das Thema "Ungleichungen" eignet sich in hervorragender Weise zur Darstellung der Vielfältigkeit von Beweismethoden, wie es die Mathematik erfordert. Viele Schüler stehen oft vor der Frage: "Wie packe ich das Problem an?" Diese Probleme dürften in Zukunft für die Schüler, die in Berlin dabei waren, geringer geworden sein, da es sich doch wieder gezeigt hat, daß man mit einigen wenigen Mitteln recht weit kommen kann. Nicht zuletzt bin ich der Meinung, daß die genaue Lektüre dieses Artikels jedem Schüler hilft, die doch weit verbreitete Aversion gegen Beweise abzubauen. Zumindest konnte ich diese Erfahrung bei unseren Schülern in Berlin machen.

Zunächst sei grundsätzlich vermerkt, daß ein "Beweis", wie der folgende, der typisch für das Beweisempfinden von Schülern ist, kein Beweis ist:

Es seien $a, b > 0$. Man zeige: $a + b > \sqrt{2ab}$.

"Beweis": $a + b > \sqrt{2ab} \Rightarrow (a + b)^2 > 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab > 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 > 0$.
w.z.b.w.?

Letzteres ist natürlich ein Irrtum! Der Beweisende hat nur gezeigt, daß $a^2 + b^2 > 0$ ist, was aber eine Trivialität ist, die mit der Behauptung nicht das Geringste zu tun hat, abgesehen davon, daß man von einer falschen Aussage ausgehend alles herleiten kann. Der Stil eines Beweises ist genau umgekehrt:

<u>Methode I:</u> *Ausgehend von einer wahren Aussage leitet man schrittweise die Behauptung her. Die zu zeigende Aussage steht am Schluß.*

Der Beweis von oben lautet also, wie folgt:
$a^2 + b^2 > 0 \quad a^2 + b^2 + 2ab > 2ab \Rightarrow (a + b)^2 > 2ab \Rightarrow |a + b| > \sqrt{2ab}$, was gleichwertig ist mit $a + b > \sqrt{2ab}$, da $a > 0$, $b > 0$ vorausgesetzt war. E.z.b.w.

Diese Niederschrift hat einen Nachteil: Woher weiß der Beweisende, daß man gerade mit $a^2 + b^2 > 0$ anfangen muß?
Eine Antwort gibt:

<u>Methode II:</u> *Die Behauptung wird solange <u>äquivalent umgeformt</u> bis eine wahre Aussage übrigbleibt.*

Die Betonung liegt hier auf "äquivalent": <u>Jeder</u> Schritt muß umkehrbar sein.

<u>1. Satz:</u> Wenn $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ist, dann gilt $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a + b}$ und umgekehrt, falls a und b größer als null ist.

Beweis: Man erkennt, daß die zweite Ungleichung etwas mit dem Kehrwert der linken Seite der ersten Ungleichung zu tun hat; so kommt man auf die folgenden äquivalenten Schritte:

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{2}{a + b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \frac{2ab}{a + b} \leq \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab} \quad \text{w.z.b.w.}$$

Am weitesten kommt man aber immer noch mit

<u>Methode III:</u> *Man formt die Behauptung in eine äquivalente Behauptung um, die günstigere Ansatzmöglichkeiten bietet.*

Für Ungleichungen erweist sich der folgende Sonderfall von III als zweckmäßig:

Methode III': *Man bringt alle Terme auf die eine Seite der Ungleichung und zeigt anschließend z.B. die Positivität der damit gewonnenen äquivalenten Ungleichung.*

2. Satz: Für alle natürlichen n gilt:

$$\sqrt{n} < \frac{n+1}{2} \iff n \leqq \frac{(n+1)^2}{4} \iff \frac{(n+1)^2}{4} - n \geqq 0.$$

Beweis: Man verwendet die letzte Äquivalenz:

$$\frac{(n+1)^2}{4} - n = \frac{(n+1)^2 - 4n}{4} = \dots\dots = \frac{(n-1)^2}{4} \geqq 0, \text{ da stets } n \geqq 1 \text{ gilt.}$$

w.z.b.w.

Falsch wäre hier wieder gewesen, von der letzten Ungleichung auszugehen; man beginnt nur mit der linken Seite und zeigt durch algebraische Umformung, daß diese positiv ist. Jeder Schüler aber kennt die Möglichkeiten, die die Algebra anbietet:

Brüche zusammenfassen,
Binomische Formeln anwenden (falls Quadrate auftreten),
Ausklammern, Faktorisieren,
Kürzen.

Meist kann man diese Möglichkeiten durchspielen nach dem Motto:

Was stört mich am meisten?

Ähnlich wie die angeführten Beweisbeispiele zeigt man folgende Äquivalenzen:

3. Satz: Sind a und b positiv, dann sind die folgenden Ungleichungen äquivalente Aussagen:

$$a + b \geqq 2\sqrt{ab} \qquad (1)$$

$$a^2 + b^2 \geqq 2ab \qquad (2)$$

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \qquad (3)$$

$$\sqrt{ab} \geqq \frac{2ab}{a+b} \qquad (4)$$

$$2(a^2 + b^2) \geqq (a+b)^2 \qquad (5)$$

$$\frac{a+b}{2} \leqq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad (6)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2 \qquad (7)$$

Für alle positiven x gilt:

$$x + \frac{1}{x} \geqq 2 \qquad (8)$$

Der Äquivalenzbeweis wird so geführt, daß man die Äquivalenzen in der folgenden Reihenfolge zeigt: (1) mit (2),
(1) mit (3) mit (4),
(2) mit (5) mit (6),
(2) mit (7) mit (8).

3. ist Teil des folgenden Satzes:

4. Satz (Satz vom harmonischen $\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$, geometrischen $(\sqrt{ab})$ und arithmetischen Mittel((a + b):2)):

a und b seien positiv; dann gilt:

$$\min(a,b) \leqq \frac{2ab}{a+b} \leqq \sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2} \leqq \frac{a^2+b^2}{2} \leqq \max(a,b).$$

Hinweis für den Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß $a \leqq b$ ist.

Im folgenden werden wir die bisherigen Überlegungen ausweiten:

<u>5. Satz:</u> Für positive a,b,c gilt: $(a + b)(b + c)(c + a) \geqq 8abc$.

Bemerkung: Die Satzaussage ist gegenüber zyklischem Vertauschen der Buchstaben a, b und c invariant.

<u>1. Beweis:</u> Man multipliziert die linke Seite aus und erhält:

$(a + b)(b + c)(c + a) = a^2b + a^2c + cb^2 + ab^2 + ac^2 + bc^2 + 2abc. =: X.$

Würde man bei letzterem Term Quadrate ausklammern, so würde man letztlich wieder den Ausgangsterm erhalten; deshalb versucht man es mit Ausklammern der linearen Faktoren und erhält:

$X = a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc.$

Mit (2) aus dem 3.Satz erhält man:

$X \geqq a2bc + b2ac + c2ab + 2abc = 8abc.$ w.z.b.w.

<u>2. Beweis</u> durch "Erniedrigung der Potenz":

$$\begin{aligned}(a + b)(b + c)(c + a) - 8abc &= a^2b - abc + a^2c - abc + ab^2 - abc + \\ &\quad +ac^2 - abc + b^2c - abc + bc^2 - abc = \\ &= ab(a - c) + ac(a - b) + ab(b - c) + ac(c - b) + bc(b - a) + bc(c - a) = \\ &= (ab - b)(a - c) + (ac - bc)(a - b) + (ab - ac)(b - c) = \\ &= b(a - c)^2 + c(a - b)^2 + a(b - c)^2 \geqq 0,\end{aligned}$$ w.z.b.w.

<u>6. Satz:</u> Falls a,b,c positiv sind, gilt:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca \qquad \text{(A)}$$

oder

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geqq 0 \qquad \text{(A')}$$

<u>1. Beweis:</u> Verwendet man binomische Formeln, so erhält man für das Doppelte von (A') einen einfachen Beweis.

<u>2. Beweis:</u> Nach (2) gilt $a^2 + b^2 \geqq 2ab$. Wendet man (2) auch auf b,c und c,a an und addiert die drei so erhaltenen Ungleichungen, so erhält man das Doppelte von (A).

<u>3. Beweis:</u> Hierzu nutzt die

<u>Methode IV:</u> <u>*Extremalprinzip und Symmetrie:*</u>
Liegt eine Aussage vor, die in ihren Variablen symmetrisch ist, d.h. die gegenüber zyklischer Vertauschung ihrer Variablen invariant ist, so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß z.B. die Variable a die größte (oder aber kleinste) ist; man wählt also ein maximales (oder minimales) Element.

Im vorliegenden Fall können wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß gilt: $a \geqq b \geqq c$.
Für die linke Seite von (A') ergibt sich dann mit $c - a = -(a - b + b - c)$

$a(a - b) + b(b - c) + c(c - a) = a(a - b) + b(b - c) - c(a - b) - c(b - c)$
$= (a - c)(a - b) + (b - c)^2 \geqq 0$, w.z.b.w

<u>7. Definition:</u> $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ eine Funktion von n Variablen heißt eine *homogene Funktion vom Grad* k, wenn gilt:

$f(tx_1,tx_2,\ldots,tx_n) = t^k f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ für alle $t > 0$

k und n aus $\mathbb{N}$

<u>4.Beweis zu 6.:</u>

<u>Methode V:</u> Bei homogenen Funktionen kann man Normierungen vornehmen.

Man definiert für den Beweis von (A'):

$f(a,b,c) := a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ und stellt fest:

$f(ta,tb,tc) = t^2 f(a,b,c)$. Nun normiert man $t = \frac{1}{a}$ und erhält für (A'):

$f(1,\frac{b}{a},\frac{c}{a}) \geqq 0$.

Setzt man noch $\frac{b}{a} =: 1 + x$ und $\frac{c}{a} =: 1 + y$ mit geeigneten x und y, so erhält man für (A') die äquivalente Umformung $f(1,1 + x, 1 + y) \geqq 0$. Letztere kann man durch Ausrechnen der linken Seite beweisen:

$$f(1,1 + x, 1 + y) = 1^2 + (1 + x)^2 + (1 +y)^2 - (1+x) -(1+x)(1+y) -(1+y) =$$
$$= x^2 + y^2 - xy = (x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 \geqq 0,$$ weil es sich um reelle Zahlen handelt.

Bei den Aufgaben des Aufgabenblattes führen die folgenden Normierungen zum Ziel: $a = 1,\ b = x,\ c = y$ oder
$a = 1,\ b = x + y,\ c = x - y$.

<u>5.Beweis zu 6.:</u> Setzt man in (A') $a = x$, so läßt sich die Aussage äquivalent umformen in $f(x) := x^2 - (b + c)x + (b^2 + c^2 - bc) \geqq 0$. Die dazugehörige Parabel hat keine oder höchstens 1 Nullstelle genau dann, wenn die dazugehörige Diskriminante $D \leqq 0$ ist.

<u>6.Beweis zu 6.:</u> mit linearer Algebra:

Mit den Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$ ist (A) äquivalent zu $\vec{x}\cdot\vec{x} \geqq \vec{x}\cdot\vec{y}$.

Diese Behauptung läßt sich beweisen: Wie man leicht nachrechnen kann, gilt $|\vec{x}| = |\vec{y}|$; deshalb gilt $\vec{x}\cdot\vec{x} = |\vec{x}|\,|\vec{x}| = |\vec{x}|\,|\vec{y}| \geqq |\vec{x}|\,|\vec{y}|\cos\measuredangle(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}$, weil $\cos\measuredangle(\vec{x},\vec{y}) \leqq 1$ ist; w.z.b.w.

<u>8. Satz</u> (CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung): Für alle reellen a_i, b_i gilt:
$$(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2)$$

Beweis:

Offenbar gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_ix + b_i)^2 \geqq 0$$ oder äquivalent hierzu:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)x^2 + 2(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqq 0$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn die Diskriminante des quadratischen Ausdrucks kleiner oder gleich Null ist:

$$4(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^2 - 4(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) \geqq 0,$$ woraus sich die Behauptung ergibt,

Für Schüler, die mit dem Summenzeichen nicht umgehen können, werden die entsprechenden Zeilen ausführlich angegeben:

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 +\ldots+ (a_nx + b_n)^2 \geqq 0$$

$$a_1^2x^2 + 2a_1b_1x + b_1^2 +\ldots+ a_n^2x^2 + 2a_nb_nx + b_n^2 \geqq 0$$

$$(a_1^2+\ldots+a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)x + (b_1^2+\ldots+b_n^2) \geqq 0$$

$$4(a_1b_1+\ldots+ a_nb_n)^2 - 4(a_1^2+\ldots+ a_n^2)(b_1^2+\ldots+ b_n^2) \geqq 0$$

Dieser Beitrag über Ungleichungen wird fortgesetzt. Im nächsten Seminar wird die TSCHEBYSCHEFF-Ungleichung bewiesen und weitere Abschätzungen mit Absolutbeträgen untersucht.

Literatur:

[1] MU - Der Mathematikunterricht, Internationale Mathematikolympiade, Jahrgang 25, Heft 1, Klett 1979.

[2] Mangoldt, Knopp: Einführung in die Höhere Mathematik, 3 Bände, 9.Auflage 1954 Hirzel Verlag, Stuttgart

Aufgaben:

1) Für reelle a,b,c gilt $(a + b)^4 \leqq 8(a^4 + b^4)$.

2) Für positive a,b,c,d gilt $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geqq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

3) Beweise die vereinfachte Form der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung für reelle a,b,c,d: $(ac + bd)^2 \leqq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

4) a,b,c seien die Seiten eines Dreiecks; mit $R:= a^2 + b^2 + c^2$ und $S:= (a + b + c)^2$ gilt dann stets:
$$\frac{1}{3} \leqq \frac{R}{S} < \frac{1}{2}$$ (Bundeswettbewerb Mathematik 1978/2)

5) Zeige, daß für alle positiven a_i $i = 1,2,3,4$ gilt:
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geqq 4 \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

6) Zeige: Aus $\frac{1}{2} < a < b$ folgt: $\frac{1 + a^2}{1 + a} < \frac{1 + b^2}{1 + b}$.

7) Seien a,b,c positive reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$; dann gilt $-\frac{1}{2} \leqq ab + bc + ca \leqq 1$ (Ungarische Olympiade 1910).

Zur Wiederholung sei die BERNOULLIsche Ungleichung angefügt:
$$(1 + x)^n \geqq 1 + nx.$$

8) Zeige unter Verwendung der BERNOULLIschen Ungleichung und durch geeignete Normierung, daß für alle positiven a,b und natürlichen n gilt:
$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leqq \frac{a + nb}{n + 1}.$$

9) Zeige: $ab + bc + ca \leqq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$. a,b,c Dreiecksseit.

10) Zeige: $2(a^2 + b^2 + c^2) < (a + b + c)^2$. a,b,c Dreiecksseiten!

11) Sind a,b,c die Seiten eines Dreiecks, dann sind dies auch die Strecken $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$.

12) Leicht zu zeigen ist: Für $a + b > 0$ gilt: $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

WER GLAUBT, EINIGE AUFGABEN (ODER NUR EINE) LÖSEN ZU KÖNNEN, MÖGE SICH AN HERRN GNILKA WENDEN. ES IST DARAN GEDACHT, DIE BESTEN LÖSUNGEN AUSZUSTELLEN.