2.Mathematikseminar des
Gymnasiums Starnberg bei
der SIEMENS AG in Berlin
Dr. Karlhorst Meyer

7.-10.3.1984

Kreise

1. Wiederholung

Da einige Teilnehmer nicht die Möglichkeit hatten, am 1.Mathematikseminar oder am Seminarnachmittag im Dezember teilzunehmen, werden hier einige Ideen der früheren Veranstaltungen zusammengestellt. Bei der Busfahrt bzw. am Abend des 7.3. kann man dann die Betreuer fragen, wenn man mit den folgenden Hinweisen nichts anfangen kann. Man betrachte das Folgende als Übungsaufgaben:

1.1 Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt (nicht notwendig in der Ebene gelegen) konstanten Abstand haben.
Die Kugel ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt konstanten Abstand haben. Der Abstand heißt jeweils Radius.

1.2 Satz (des Pythagoras von Samos 500 v.Chr.; in Wirklichkeit stammt nach unserem Wissen der Satz aus Sumer um 3000 v.Chr.):
Die Summe der Quadrate aus den Kathetenlängen eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Quadrat aus der Hypotenusenlänge.

1.3 Ein System (O;x,y,z) heißt kartesisches Koordinatensystem (benannt nach DESCARTES oder Cartesius (Frankreich 1596-1650), wenn x,y,z sich in O rechtwinkelig schneiden und ein sogenanntes Rechtssystem bilden.

Für die Punkte (x;y) eines Kreises k (bzw. einer Kugel Ku) mit Radius r und Mittelpunkt (0;0) folgt unmittelbar aus 1.2:

$$k:\ x^2 + y^2 = r^2$$
$$Ku:\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Translatiert man den Mittelpunkt nach $(x_o;y_o)$ so ergeben sich die folgenden Formeln:

$$k:\ (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2 \quad \text{für } z = 0$$
$$Ku:\ (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = r^2.$$

k wie Ku können unter Verwendung von Vektoren $\vec{x} = (x;y;z)$ bzw. $\vec{x} = (x;y)$ eleganter mit dem Skalarprodukt dargestellt werden (Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 9 und 10 erhalten hiervon eine Ahnung am Einführungsabend und bei anderer Gelegenheit, wenn sie die Betreuer fragen):

$(\vec{x} - \vec{M})^2 = r^2$; dies ist ein Kreis k mit Mittelpunkt $\vec{M} = (x_o;y_o)$, falls der Darstellungsraum zweidimensional ist, dies ist eine Kugel Ku mit Mittelpunkt $\vec{M} = (x_o;y_o;z_o)$, falls der Darstellungsraum dreidimensional ist; r ist jeweils der Radius.

Schon hier ist zu erkennen, daß geschickte Schreibweisen in der Mathematik viel helfen können. Für die Kreisdarstellung werden wir noch eine weitere wichtige Schreibweise in 4. kennen lernen.

In Erlangen (23.-25.2.83) wurden die folgenden Themen über Kreise angeschnitten:

1.4 Definition: Gegeben ist die Punktmenge Ku einer Kugel, die eine Ebene berührt, deren Punktmenge ε ist. N sei der Kugelpunkt, der dem Berührpunkt gegenüberliegt. Die folgende Punktabbildung
Ku $\to$ ε heißt *stereographische Projektion:*
$P \neq N$ sei ein Kugelpunkt; PN ist dann eine Gerade, die ε schneidet in P', dem stereographischen Bild von P. Um die Abbildung auf allen Kugelpunkten eineindeutig zu machen, ordnet man der Ebene ε *<u>einen</u> Fernpunkt* ∞ zu.

Diese Fernpunktsdefinition läuft allen unseren Vorstellungen und Erfahrungen zuwider: Wir sind im Unter- und Mittelstufenunterricht gewohnt, daß jede Gerade in zwei verschiedenen Richtungen ins "Unendliche" verlängert werden kann. In der Projektiven Geometrie ordnet man dann jeder Geraden nur <u>einen</u> Fernpunkt zu (die Menge aller Fernpunkte einer Ebene bildet dann <u>die</u> sogenannte Ferngerade); wie 1.4 aber zeigt, ist es zweckmäßig, bei manchen geometrischen Betrachtungen einer Ebene nur <u>einen</u> Fernpunkt zuzuordnen; dieser Sachverhalt wird beim vorliegenden Seminar eine wichtige Rolle spielen; wir werden erkennen, daß es geometrische Strukturen gibt, die zweckmäßiger Weise die Definition eines einzelnen Fernpunkts erzwingen.

In Erlangen haben wir beobachtet, daß das Bild eines Kugelkreises entweder ein Kreis oder eine Gerade ist (Frage andere Teilnehmer, ob sie dies erklären können).

1.5 Definition: Schneiden sich zwei glatte Kurven in P, so sagt man: Die Kurven schneiden sich unter dem Winkel ihrer Tangenten.

Die Menge der Zykel einer Ebene ist die Menge ihrer Kreise vereinigt mit der Menge ihrer Geraden.

Eine Abbildung heißt winkeltreu, wenn die Winkelgrößen bei der Abbildung erhalten bleiben.

Eine Abbildung heißt kreistreu (zykeltreu), wenn das Bild eines Kreises (Zykel) ein Kreis (Zykel) ist.

1.6 Satz: Die stereographische Projektion ist winkel- und kreistreu; letzteres bedeutet, daß die Menge der Kugelkreise eineindeutig auf die Menge der Zykel der Ebene abgebildet wird.

In Erlangen haben wir dann noch über den Aufblastrick beim Konstruieren gesprochen, der hier keine Rolle spielen wird.

Am Seminarnachmittag im Dezember 1983 war die Rede von *Gleichdicken*, die hier ebenfalls direkt keine Verwendung finden werden, deren Kenntnis aber hilft, die Bedeutung der Kreise zu würdigen.

<u>Weitere vorbereitende Aufgaben:</u>

1.7 Suche die folgenden stereographischen Bilder:
a) aller Kreise durch N und einem weiteren festen Punkt P;
b) aller Kreise durch zwei beliebige feste Punkte der Kugel;
c) aller Kreise mit einer gemeinsamen Tangente in P oder in N;
d) aller Kreise, die auf den Kreisen von a) oder b) oder c) senkrecht stehen.

1.8 Konstruiere mit Zirkel und Lineal ein vom Kreis verschiedenes Gleichdick
a) mit drei Symmetrieachsen;
b) mit zwei Symmetrieachsen;
c) mit einer Symmetrieachse;
d) mit keiner Symmetrieachse.

1.9 Wie sieht das Urbild der stereographischen Projektion aus von
a) einem gleichseitigen Dreieck;
b) einem Quadrat;
c) einem regulären Sechseck.

1.10 In welchem Bereich kann die stereographische Projektion als Kartenprojektion verwendet werden?

1.11 Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r und eine Punktabbildung der Ebene ε auf sich mit der folgenden Eigenschaft: Der Bildpunkt X' von X wird durch die Gleichung $\overline{MX} \cdot \overline{MX'} = r^2$ bestimmt.

a) Zeichne einen Kreis mit Radius r = 3 cm und finde das Bild von
b) einem Punkt X mit $\overline{MX}$ = 5 cm;
c) einer Geraden g, deren Abstand von M 5 cm beträgt;
d) einer Geraden d durch M;
e) einer Sekanten ungleich dem Fall d).

Die folgenden Aufgaben bitte nicht vor dem 8.3. bearbeiten:

1.12 Was ist die Struktur eines Körpers?

1.13 Warum und wie kann man in der Menge K = {a + bd mit a,b beliebig aus Q, d^2 = 2 fest} eine Addition und eine Multiplikation so definieren, daß K ein Körper wird. K heißt quadratischer Erweiterungs- oder Oberkörper von Q. Was läuft an der Konstruktion leer, falls d eine Lösung der Gleichung d^2 = 4 ist?
Man schreibt: $K = Q(\sqrt{2})$.
Warum ist $K(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = K(\sqrt{3})(\sqrt{2})$ für jeden Körper K?

Die folgende Aufgabe kann nach 2.3.3 behandelt werden:

1.14 Unter alleiniger Verwendung von einem Zirkel ist an einem Kreis k ein innerer Punkt zu spiegeln.

Die folgende Aufgabe kann nach 2.6 bearbeitet werden:

1.15 Welche Minimalschritte sind nötig, um das Kreisspiegelungsbild eines Kreises konstruktiv zu finden, wenn der Kreis den Spiegelungskreis
a) nicht trifft,
b) berührt,
c) schneidet.

Die folgende Aufgabe kann nach 5.2 gelöst werden:

1.16 Man konstruiere zu einem parabolischen oder elliptischen oder hyperbolischen Kreisbüschel die Orthogonaltrajektorien.

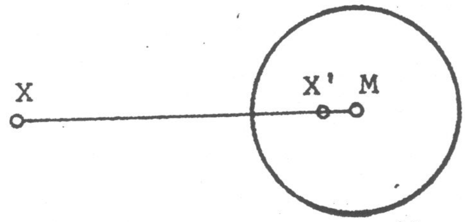
1.17 Konstruiere mehrere Bildpunkte nach der Kreisspiegelung bzw. nach der physikalischen Reflexion.

2. Kreisspiegelungen

2.1 Definition: Eine Punktabbildung $X \to X'$ heißt *Kreisspiegelung oder Inversion am Kreis* k mit Radius r und Mittelpunkt M, wenn gilt: X liegt auf der Geraden MX und es ist

$$\overline{MX} \cdot \overline{MX'} = r^2. \quad (1)$$

Wir schreiben $S_k X = X'$.



Der Zusammenhang mit Anwendungen (z.B. Kugelspiegel: Rückspiegel u.a.) wird in 5. hergestellt.

Eigenschaften dieser Punktabbildung: Aus 2.1 folgen unmittelbar:

2.2 Satz: Die Abbildung ist auf der Ebene für alle Punkte, die von M verschieden sind eineindeutig und involutorisch, d.h., es gilt:

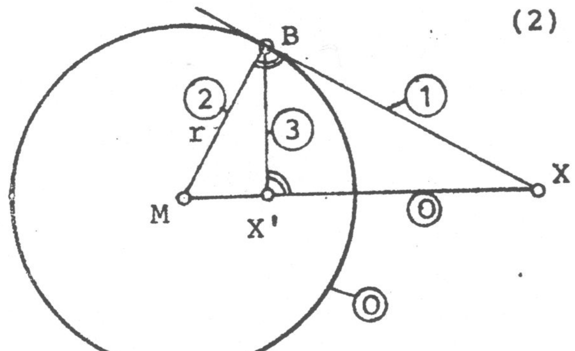
$$S_k^2 = \mathrm{id}.$$

Die Kreispunkte sind Fixpunkte, jede Gerade durch M ist Fixgerade; das Kreisinnere geht in das Kreisäußere über falls diese Unterscheidung in der betrachteten Ebene sinnvoll ist (Bei z.B. Ebenen über endlichen Körpern gibt es zwar Inversionen, aber wegen der fehlenden Anordnung diese Unterscheidung nicht.).

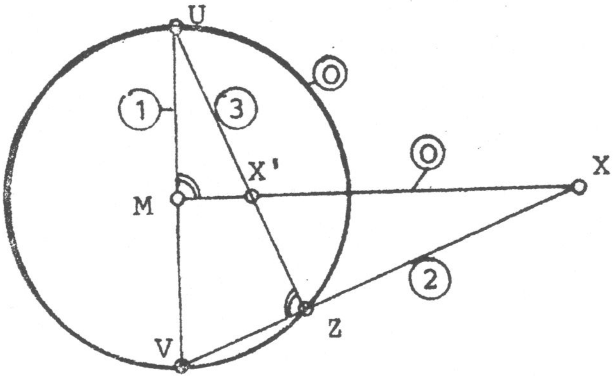
Bevor weitere Eigenschaften studiert werden, versuchen wir Wege zu finden, die zulassen, den Abbildungsvorgang konstruktiv darzustellen (mit Zirkel und Lineal):

Aus 2.1 (1) folgt: $$\frac{\overline{MX}}{r} = \frac{r}{\overline{MX'}} \qquad (2)$$

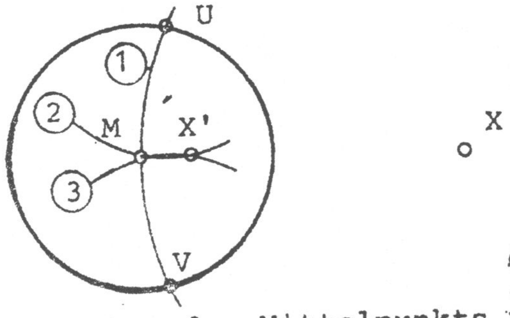
Hieraus folgen drei Konstruktionen:



2.3.1 Nach dem Ähnlichkeitssatz ww ist $\Delta MBX \sim \Delta MBX'$, also folgt (2).



2.3.2 Der Inversionskreis ist THALESkreis über UV (THALES von Milet um 500 v.Chr., der Satz stammt aber vermutlich aus Persien viel früher); deshalb ist bei Z ein rechter Winkel. Wenn Winkel Schenkel haben, die paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind sie gleich. Also sind bei X und U gleichgroße Winkel. Also ist abermals nach dem Ähnlichkeitssatz ww $\Delta MVX \sim \Delta UMX'$ und es folgt (2).



2.3.3 Es folgt eine Konstruktion, die sich ohne Lineal ausführen läßt:

Nach Konstruktion haben die beiden gleichschenkeligen Dreiecke MUX und MX'U bei M einen Winkel gemeinsam, sind also nach ww ähnlich. Also folgt (2).

Bei inneren Punkten X muß man mit dem Aufsuchen des Mittelpunkts von $\overline{MX}$ beginnen (vergl. Aufgabe 1.14).

Die letztere Konstruktion ist zwar interessant, aber für das Konstruieren in der Praxis wegen ihrer großen Ungenauigkeit ohne Interesse.

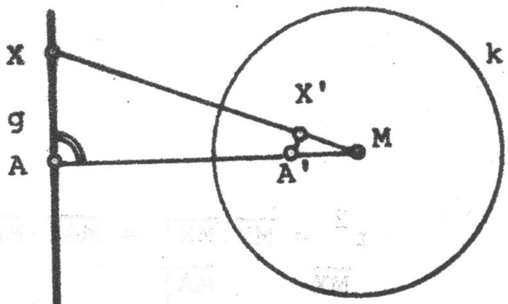
In Analogie zu 1.2.2 definieren wir in Ergänzung zu 2.2:

__2.4 Definition:__ $S_k M = \infty$, d.h. die Punktebene umfaßt nun auch ∞ ; alle Geraden haben den Fernpunkt ∞ gemeinsam. (Vergl.die Bemerkung im Anschluß an 1.4).

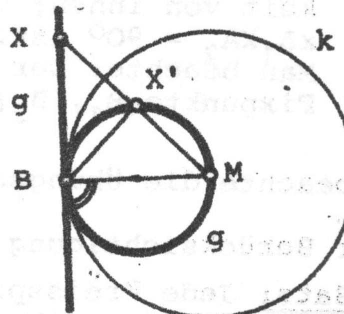
Aus 2.2 folgt dann sofort:

__2.2' Satz:__ Die Inversion S_k am Kreis k ist auf der erweiterten Ebene bijektiv und involutorisch, d.h. $S_k^2 = id$. Die Geraden durch M sind fix, alle Punkte von k sind Fixpunkte. Das Kreisinnere, falls vorhanden, geht in das Kreisäußere und umgekehrt über.

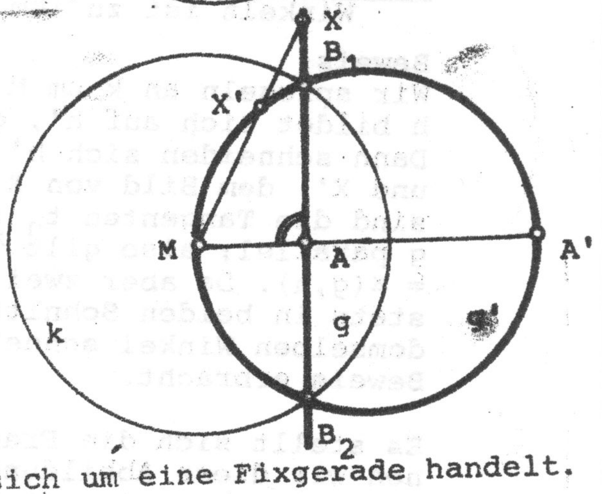
__2.5 Satz:__ Jede Kreisspiegelung ist zykeltreu (vergl.1.5).



Beweis:
1) Spiegeln wir g an k.
a) $g \cap k = \emptyset$.
Es sei $A' = S_k A$ und $X' = S_k X$.
Wegen (1) gilt:
$r^2 = \overline{MA} \cdot \overline{MA'} = \overline{MX} \cdot \overline{MX'}$ d.h.
$\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MX}} = \dfrac{\overline{MX'}}{\overline{MA'}}$; weil beide Dreiecke bei M einen Winkel gemeinsam haben, folgt: $\Delta MAX \sim \Delta MA'X'$, d.h. bei X' ist ein rechter Winkel, also muß X' für alle X auf dem THALESkreis t über $\overline{MA}$ liegen, d.h. $S_k g = t$.



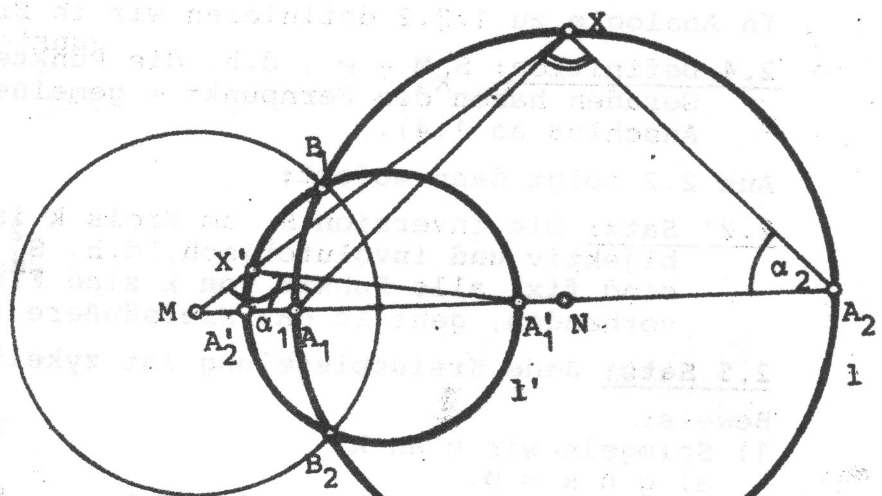
b) $g \cap k = B = S_k B$.
Der Beweis läuft wie bei a) mit A' = B' und A = B.



c) $g \cap k = \{B_1, B_2\}$ und $g \cap M = \emptyset$.
B_1 und B_2 sind dann Fixpunkte.
Die Formeln von a) führen auch hier zum Beweis.

d) $g \ni M$; wir wissen bereits, daß es sich um eine Fixgerade handelt.
Das Bild einer Geraden ist also ein Zykel.

2. Spiegeln wir einen Kreis l an einem Kreis k (Mittelpunkt M, Radius r):
   a) Ist $l = k$, so bleibt l punktweise fix.
   b) Ist l konzentrisch zu k, so erhält man wegen 1.1 und (1) sofort: l' ist wieder ein konzentrischer Kreis um M.
   c) Hat l einen Mittelpunkt $N \neq M$, dem Mittelpunkt von k, so gilt:



$r^2 = \overline{MX}\cdot\overline{MX'} = \overline{MA_i}\cdot\overline{MA_i'}$ nach (1) oder

$\frac{\overline{MX}}{\overline{MA_i}} = \frac{\overline{MA_i'}}{\overline{MX'}}$; weil die Dreiecke MXA_i und $MX'A_i'$ bei M einen Winkel gemeinsam haben, folgt nach dem Ähnlichkeitssatz sws_o die Ähnlichkeit von ihnen; d.h. $\measuredangle MX'A_1' - \measuredangle MX'A_2' = \alpha_1 - \alpha_2 = 90^\circ$, weil $\measuredangle A_1XA_2 = 90^\circ$ ist.

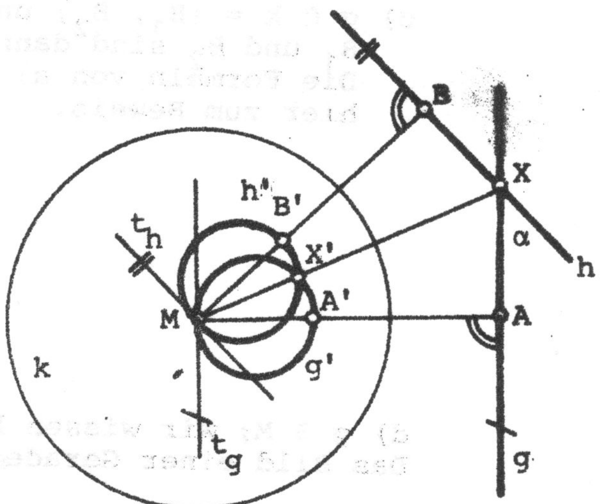
Man beachte: Der Beweis benutzt nicht die Existenz eventueller Fixpunkte B_1, B_2; er gilt also in jedem Fall.

Man beachte die Übungsaufgabe 1.15.

Unter Berücksichtigung von Definition 1.5 findet man:

<u>2.7 Satz:</u> Jede Kreisspiegelung ist winkeltreu, d.h. das Bild eines Winkels ist zu ihm kongruent, wobei sich der Drehsinn umkehrt.

Beweis:
Wir spiegeln an k um M mit Radius r: h bildet sich auf h', g auf g' ab. Dann schneiden sich h' und g' in M und X', dem Bild von $X = g \cap h$. Es sind die Tangenten t_h zu h und t_g zu g parallel; also gilt $\measuredangle(t_g, t_h) = \measuredangle(g,h)$. Da aber zwei Kreise sich stets in beiden Schnittpunkten unter demselben Winkel schneiden, ist der Beweis erbracht.

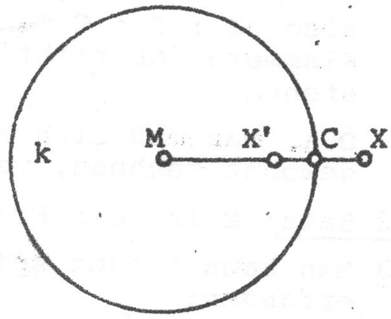


Es stellt sich die Frage, warum nennen wir diese Abbildung Kreisspiegelung, was hat sie mit den bekannten Geradenspiegelungen zu tun:

Man kann dies durch einen Grenz-übergang erklären; allerdings ist diese Überlegung nicht ganz sauber, erfaßt auch im Hinblick auf nicht reelle Körper nicht die Tragweite des Zusammenhangs; durch 4.5 wird der Zusammenhang deutlicher:

Man nehme einen sehr großen Kreis k und spiegle einen Punkt X sehr nahe an k gelegen; man wird dann zumindest lokal k nicht mehr von einer Geraden unterscheiden können.

Aus (2) folgt:



$$1 - \frac{\overline{MX}}{r} = 1 - \frac{r}{\overline{MX'}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{r - \overline{MX}}{r} = \frac{\overline{MX'} - r}{\overline{MX'}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{r - \overline{MX}}{\overline{MX'} - r} = \frac{r}{\overline{MX'}} \quad \text{oder}$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\overline{CX}}{\overline{CX'}} = \lim_{r\to\infty} \frac{r}{\overline{MX'}} = 1,$$

also $\overline{CX} = \overline{CX'}$; d.h. die Geradenspiegelung ist ein Grenzfall der Kreisspiegelung.

Insgesamt gilt also in der Anschauungsebene:

<u>2.8 Hauptsatz:</u> Jede Zykelspiegelung ist zykel- und winkeltreu. Die Menge der Fixpunkte wird genau durch den Zykel erfaßt. Genau die Senkrechten auf dem Zykel sind die Fixgeraden.

Zum Beweis fehlt noch, daß es keine weiteren Fixpunkte geben kann: Aus $X = X'$ folgt nach (1): $\overline{MX}^2 = r^2$; deshalb muß notwendigerweise X ein Kreispunkt sein.

Wie in[6]gezeigt wurde, gilt der Zusammenhang über jedem kommutativen Körper. Wer sich für den axiomatischen Hintergrund interessiert, möge nachlesen bei DEMBOWSKI[3], und neuerer Literatur z-B. bei MÄURER z.B. [5]. Wer sich für algebraische, auch zahlentheoretische Zusammenhänge interessiert, möge nachlesen bei BENZ z.B. in [1]. SCHRÖDER und andere haben die ebene Kreisgeometrie einerseits in den Raum zu einer Geometrie der Kugeln verallgemeinert, aber auch Zusammenhänge z.B. mit MINKOWSKIgeometrien (also relativistischen) hergestellt. Die zitierte Literatur ist vor dem 4.Semester eines Mathematikstudiums in der Regel unverständlich.

Die Zykelspiegelungen haben also sehr ähnliche Eigenschaften zur stereographischen Projektion; auch in diesem Zusammenhang wird auf 4.5 verwiesen.

3. GAUSSsche Zahlenebene

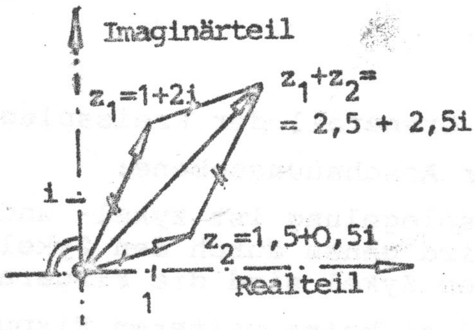
KARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

3.1 Definition (nach GAUSS): $\mathbb{R}$ sei der Körper der reellen Zahlen.
Die Menge $\mathbb{C}:= \{a + bi: a,b \text{ aus } \mathbb{R}\}$ mit einer festen (gedachten) Lösung i der quadratischen Gleichung $x^2 + 1 = 0$ (1)
heißt Menge der *komplexen Zahlen*.
Man definiert: $(a + bi) \boxplus (c + di) := (a + c) + (b + d)i$,
also $\boxplus : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und
$(a + bi) \boxdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$,
also $\boxdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, mit $i^2 = -1$ (vergl. (1)), wobei in den Klammern der rechten Seiten jeweils die Verknüpfungen in $\mathbb{R}$ stehen.

D.h. man muß sich nur $i^2 = -1$ merken und kann wie im Reellen gewohnt rechnen, wenn man $\boxplus$ gleichsetzt mit + und $\boxdot$ mit $\cdot$.

3.2 Satz: $\mathbb{C}$ ist ein Erweiterungs- oder Oberkörper von $\mathbb{R}$.

3.3 Man kann $\mathbb{C}$ samt seinen Rechenoperationen nach GAUSS zeichnerisch erfassen:



Man sagt $\mathbb{C}$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^2$, wobei die Addition in $\mathbb{C}$ der Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$ entspricht.

Um zu einer zeichnerischen Darstellung der Mulitplikation zu kommen, stellen wir jede komplexe Zahl z dar als

$z = x + yi = |z| \cdot (\cos \phi + i \sin \phi)$.

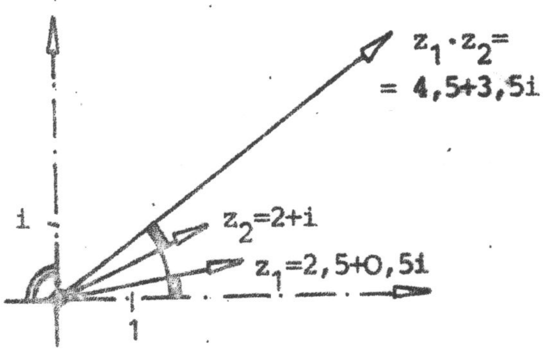
Eine einfache Rechnung ergibt dann nach den Additionstheoremen:

$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$

und analog:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$$

(Satz des MOIVRE, Frankreich 1667-1754). Hieraus ergibt sich zeichnerisch die folgende Lösung:



Aus den Zeichnungen ist sofort einsichtig:

Die Abbildung $z \to z' = z \cdot M$ ist eine Drehung, falls $|M| = 1$ ist, sonst eine Drehstreckung.

Die wichtigste Eigenschaft der komplexen Zahlen, deren Beweis sehr tiefliegend und schwierig ist:

3.4 Satz: (Hauptsatz der Algebra): Für $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$ gibt es stets $x_j \in \mathbb{C}$ mit

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o = a_n (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

für alle $x \in \mathbb{C}$.

D.h.: Alle algebraischen Gleichungen in $\mathbb{C}$ sind lösbar, d.h. es gibt keinen algebraischen Erweiterungskörper über $\mathbb{C}$. Z.B. sind alle quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$ lösbar.

3.5 Definition: $a - bi$ heißt zu $a + bi$ *konjugiert komplex*, man schreibt:

$\overline{a + bi} := a - bi$ für den Übergang zum konjugiert Komplexen.

3.6 Satz: Für alle $z_i \in \mathbb{C}$ gilt: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

bzw.: $\overline{\overline{z_i}} = z_i$,

wie man mit 3.1 leicht nachrechnen kann. Der Mathematiker sagt: Die Abbildung — ist auf $\mathbb{C}$ ein involutorischer Automorphismus.

3.7 Definition: Es sei $z \in \mathbb{C}$: $N(z) := z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ heißt *Norm* von $z = a + bi$. In Analogie zur Vektorrechnung schreiben wir:

$|z| = \sqrt{N(z)}$.

$S(z) := z + \overline{z} = 2a$ heißt *Spur* von $z = a + bi$.

3.8 Satz: $N(z) \in \mathbb{R}$, und $S(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

$N(z) = N(\overline{z})$ und $S(z) = S(\overline{z})$, $S(z_1 + z_2) = S(z_1) + S(z_2)$ und

$N(z_1 z_2) = N(z_1) \cdot N(z_2)$,

wie man leicht nachrechnen kann.

3.9 Satz: $z \in \mathbb{C}$: $N(z - M) = r^2$ ist in der GAUSSebene ein Kreis um M mit Radius r für alle $M \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$.

Beweis: Es sei $z = x + yi$ und $M = m_1 + m_2 i$, $r \in \mathbb{R}^+$; dann gilt:

$N(z - M) = (z - M)(\overline{z} - \overline{M}) = (x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$.

3.10 Satz: $\{z \in \mathbb{C}$ mit $\overline{z}M + z\overline{M} + d = 0\}$ ist in der GAUSSebene eine Gerade falls $M \in \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{R}$.

Beweis:
$z = x + yi$, $M = a + bi \neq 0$, $d \in \mathbb{R}$. Dann folgt:
$(x - iy)(a + bi) + (x + yi)(a - bi) + d = 0$ bedeutet:
$ax + by + ax + by + d = 0$ oder
$2ax + 2by + d = 0$.

Bei Körpercharakteristik 2 muß man hier anders argumentieren!

Leider kann man hier nicht direkt zu den Spiegelungen kommen; es sei denn, man nimmt viel Rechenaufwand in Kauf.

4. Lineare Funktionen und Zykeltreue

4.1 Definition: $z \to z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit a,b,c,d aus $\mathbb{C}$ und $ad - bc \neq 0$
heißt *lineare Funktion.*

Um welche Funktionen oder Abbildungen auf der GAUSSebene handelt es sich dabei?

I. *ganz lineare Funktion:* $z' = az + b$.
1) $a = 1$, also $z' = z + b$ ist eine *Translation* um b, falls $b \neq 0$.
Im Fall $b = 0$ handelt es sich um die identische Abbildung.

2) $b = 0$, also $z' = az$ ist nach 3.3 eine Drehstreckung um 0;
falls $N(a) = 1$ ist es eine reine Drehung um 0,
falls $a \in \mathbb{R}$ handelt es sich um eine reine Streckung mit Zentrum 0,
d.h. $z' = za$ ist stets eine *Ähnlichkeitsabbildung.*

3) $z' = az + b$ beliebig mit $a \neq 0$ ist deshalb zusammengesetzt aus einer Translation und einer Drehstreckung, also auch eine Ähnlichkeitstransformation, d.h. also winkel-, kreis- und zykeltreu.

4.2 Satz: $z' = az + b$ mit a,b aus $\mathbb{C}$ und $a \neq 0$ ist winkel-, kreis- und geradentreu.

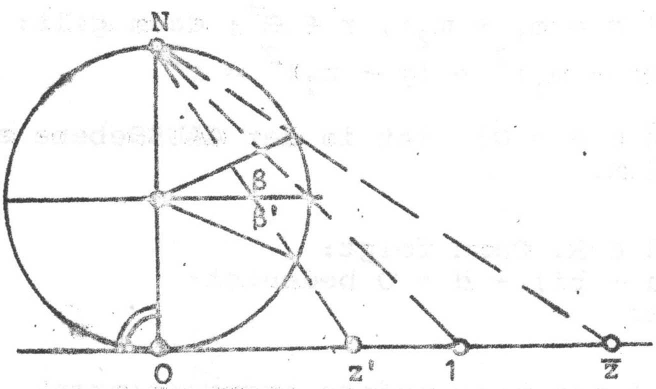
II. Die gebrochen lineare Funktion $z' = \dfrac{1}{z}$.
Nach 3. findet man für $z = \sqrt{N(z)}\cdot(\cos\phi + i\sin\phi)$:
$$z' = \frac{1}{\sqrt{N(z)}}(\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)),$$
d.h. man gehe zum reziproken Abstand über und spiegle an der Realachse der GAUSSebene, d.h. gehe zum konjugiert Komplexen über.D.h.

4.3 Satz: $z' = \dfrac{1}{z}$ bedeutet eine Spiegelung am Einheitskreis mit einer anschließenden Spiegelung an der Realachse.

Verkn-üpfen wir die Abbildung von 4.3 mit dem Übergang zum konjugiert Komplexen (was sicher eine Kongruenzabbildung ist), so erhalten wir:

4.4 Korollar: $z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$ ist die Spiegelung am Einheitskreis.

Jetzt kann man leicht einsehen, was diese Abbildung mit einer Spiegelung der Anschauung zu tun hat:



Über $\cot(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}) = \sqrt{N(z)}$ und
$$\cot(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta'}{2}) = \frac{1}{\sqrt{N(z)}} = \sqrt{N(z')}$$
findet man $|\beta| = |\beta'|$.

4.5 Satz: Die stereographische Projektion auf eine Kugel mit Durchmesser des Spiegelungskreises führt die Kreisspiegelung an der Kugel in eine Spiegelung an der Äquatorebene über.

Wegen der Vereinbarungen in 2 gilt:

4.6 Korollar zu 4.3: $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$.

$z' = \frac{1}{z}$ hat nur die Fixpunkte $z = \pm 1$.

Diese Abbildung ist winkel- und zykeltreu.

Die Spiegelung am Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r geschieht so, daß $|z||z'| = r^2$, d.h.

$|z'| = \frac{r^2}{|z|}$. Wegen MOIVRE 3.3 folgt $z' = \frac{r^2}{\bar{z}}$.

Verschiebt man den Kreis vom Mittelpunkt O nach M, so muß man z und z' mitverschieben; deshalb gilt:

4.7 Satz: Die Spiegelung am Kreis mit Mittelpunkt $M \in \mathbb{C}$ und Radius $r \in \mathbb{R}^*$ wird beschrieben durch:

$$z' - M = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{M}} \quad \text{oder} \quad z' = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{M}} + M \quad \text{oder}$$

$$z' = \frac{\bar{z}M + (r^2 - N(M))}{\bar{z} - \bar{M}}.$$ Die Abbildung ist winkel- und zykeltreu.

Man beachte: Hierfür haben wir jetzt zwei unabhängige Beweise gefunden!

III. Nun sei $z' = \frac{az + b}{cz + d}$ (1)

eine beliebige lineare Abbildung; offenbar muß $(c,d) \neq (0,0)$ sein.

1) $c = 0$, $d \neq 0$, dann ist $z' = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$ eine ganz lineare Abbildung, siehe I.

2) $c \neq 0$:
Aus (1) folgt: $z' = -\frac{ad - bc}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c} =$ (2)

$$= \frac{-ad + bc + acz + ad}{c(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

D.h.: Die obige Bedingung $ad - bc \neq 0$ ist erforderlich, denn sonst wäre die Abbildung nicht mehr bijektiv, sondern würde alles auf einen Punkt abbilden.

Die Wirkung von (2) kann nun in drei Schritte zerlegt werden:

a) $w = cz + d$ (eine Ähnlichkeitsabbildung!),

b) $w' = \frac{1}{w}$ (eine winkel- und zykeltreue Abbildung!) und

c) $z' = -\frac{ad - bc}{c} w' + \frac{a}{c}$ (eine Ähnlichkeitsabbildung!).

Damit haben wir bewiesen:

4.8 Satz: Die lineare Funktion $z' = \frac{az + b}{cz + d}$ mit $ad - bc \neq 0$ und a,b,c,d aus $\mathbb{C}$ ist winkel- und zykeltreu.

Die Abbildung ist umkehrbar:

$z = \frac{-dz' + b}{cz' - a}$ beschreibt die Umkehrabbildung.

Beweis zur letzten Behauptung:

$$\frac{-d\frac{az + b}{cz + d} + b}{c\frac{az + b}{cz + d} - a} = \frac{-adz - bd + bcz + bd}{acz + bc - acz + ad} = z.$$

4.9 Satz: Die linearen Funktionen bilden eine Gruppe.

Beweis: Da bei Abbildungen grundsätzlich das Assoziativgesetz gilt, und bereits in 4.8 gezeigt wurde, daß zu jeder Abbildung eine Inverse existiert, genügt es zu zeigen, daß die Verkettung zweier linearer Funktionen wieder eine lineare Funktion ist:

$$w = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \qquad \text{ergibt } z' = \frac{az + b}{cz + d} \qquad \text{falls}$$

$$z' = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix}$$

Falls $a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$ und $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$, folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz oder direkt $ad - bc \neq 0$. Das Produkt ist also wieder eine lineare Funktion.

4.10 Satz: Jede lineare Funktion hat höchstens 2 Fixpunkte.

Weiß man also, daß eine lineare Funktion drei Fixpunkte hat, so folgt: Die lineare Funktion ist die identische Abbildung.

Beweis:

$$z = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ergibt: } cz^2 - (a-d)z - b = 0.$$

Diese quadratische Gleichung kann nur dann mehr als zwei Lösungen haben, wenn $c = a - d = b = 0$ ist; dann handelt es sich aber um die identische Abbildung.

4.11 Zusatz: ∞ ist genau dann Fixpunkt, wenn die lineare Funktion ganz ist. ∞ ist genau dann der einzige Fixpunkt, wenn die lineare Funktion eine Translation ist.

5. Anwendungen

5.1 Definition: Alle Kreise, die durch 2 Punkte gehen, bilden ein sogenanntes *elliptisches Büschel*.
Alle Kreise, die eine Tangente gemeinsam haben, bilden ein sogenanntes *parabolisches Büschel*.

Um das elliptische Büschel bequem studieren zu können, bilden wir es so ab, daß der eine der gemeinsamen Punkte ∞ und der andere O wird. Dies geht kreis- und winkeltreu mit einer linearen Funktion. Man erhält ein Geradenbüschel durch O; nehmen wir zwei beliebige "Kreise" k_i - besser Zykel - aus diesem Büschel heraus und fragen nach der Menge

$(k_1,k_2)^{\perp} := \{k: k \perp k_1 \text{ und } k \perp k_2\}$.

Man erkennt: Dies ist die Menge der konzentrischen Kreise um O.

5.2 Definition: Jede Kreismenge, die durch eine lineare Funktion auf konzentrische Kreise um O abgebildet werden kann, heißt *hyperbolisches Büschel*.

Offenbar gilt: Je zwei Kreise eines hyperbolischen Büschels haben keinen Punkt gemeinsam.

5.3 Satz: Falls $k_1 \neq k_2$ zwei Kreise aus einem
hyperbolischen
parabolischen Büschel
elliptischen

sind, ist $(k_1,k_2)^{\perp}$ ein
elliptisches
parabolisches Büschel.
hyperbolisches

Mit Zirkel und Lineal kann man dies anschaulich nachprüfen (vergl. 1.16); der Beweis geht mit den in 4. bereitgestellten Mitteln und gilt allgemein für jeden Körper K und einem quadratischen Oberkörper (vergl. hierzu ZEITLER [7]).

Damit haben wir auch eine Anwendungsaufgabe gefunden:

Will man das elektrische Feld mit den dazugehörigen Potentiallinien z.B. zwischen zwei geladenen Punkten studieren, so sind die elektrischen Feldlinien angenähert ein elliptisches Kreisbüschel, die Potentiallinien senkrecht hierzu angenähert ein hyperbolisches Kreisbüschel. Rechnerisch leichter wird alles, wenn man durch eine lineare Abbildung den einen Pol nach ∞ schickt und den anderen nach O. Das elektrische Feld wird dann radial und somit durch Vektorrechnung leicht darstellbar; die Potentiallinien sind dann konzentrische Kreise.

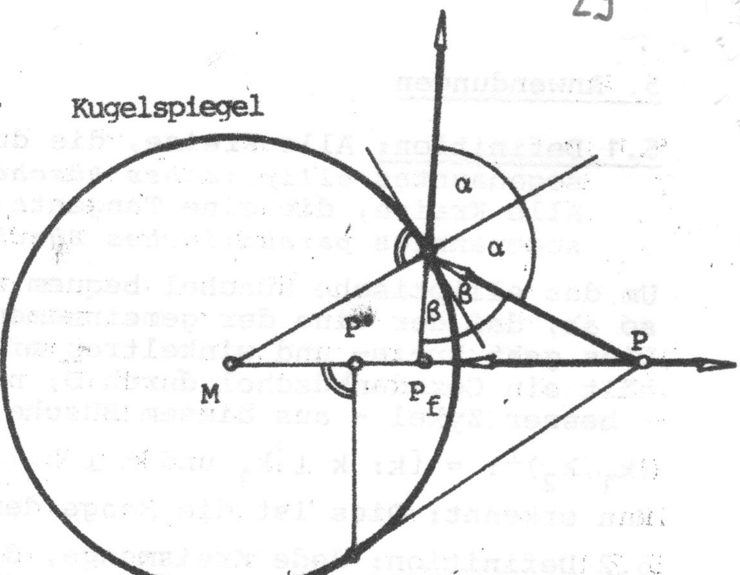
Dieser Trick geht auch allgemeiner; deshalb studiert man allgemein *konforme Abbildungen*, d.h. vor allem winkeltreue Abbildungen. Man kann so viele Formen von Ladungsträgern auf parallele Kondensatorplatten "umbiegen", um leichter rechnerische Darstellung für Felder zu bekommen.

Als letzte Frage stellen wir: Was hat die Spiegelung am Kreis, an der Kugel, die wir definierten, mit der, die auf dem Reflexionsgesetz fußt, zu tun:

In 1.17 haben wir versucht, nach dem Reflexionsgesetz und nach der mathematischen Kreisspiegelung einen Zusammenhang zu konstruieren. Das Ergebnis fiel negativ aus. Man erkennt:

Das Reflexionsgesetz bewirkt durchaus ein anderes Bild als die Kreis- oder Kugelspiegelung der Mathematik (auch hier irrt ZEITLER [8] in einer auch sonst sehr unexakten Arbeit):

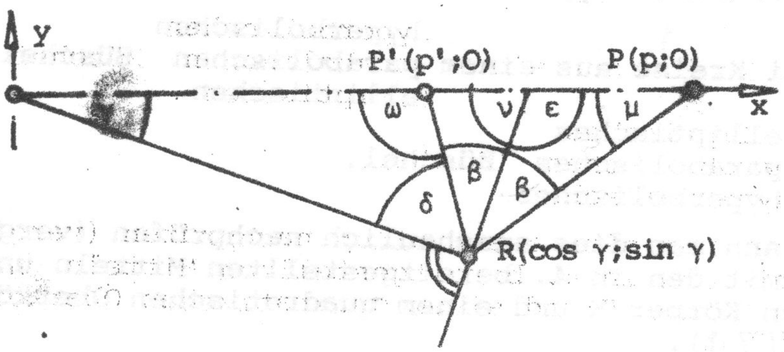
P' entsteht als Bild einer mathematischen Kreisspiegelung, P^f als Bild einer Reflexion.



In der Tat "sehen" wir aber im Kugelspiegel ein virtuelles Bild, wie es der Künstler ESCHER in [2]anhand von Kreis- und Kugelspiegelungen versuchte zu konstruieren, oder anzunähern.

Führen wir die folgende Rechnung durch:

Stehen wir mit unserem Auge auf der Geraden MP hinter P, so nehmen wir das Bild in P^f (siehe die nächste Abbildung) wahr; wir können davon ausgehen, daß unsere Augenpupille nur streifende Sehstrahlen, also solche für sehr kleine γ wahrnimmt.



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der Kreis, an dem gespiegelt wird, vom Radius 1

Es gilt dann:
$\nu = 90^\circ - \gamma$ hieraus folgt
$\varepsilon = 90^\circ + \gamma$ und somit
$\beta = 180^\circ - \varepsilon - \mu = 90^\circ - \gamma - \mu$
oder $\delta = 90^\circ - \beta = \gamma + \mu$ oder

$\omega = 180^\circ - \gamma - \delta = 180^\circ - 2\gamma - \mu.$

Mit den Bezeichnungen der Skizze gilt dann:

$$\tan\mu = \frac{\sin\gamma}{p - \cos\gamma} \quad \text{oder} \tag{1}$$

$$p^f = \frac{p^f}{1} = \frac{\sin\delta}{\sin\omega} = \frac{\sin(\gamma+\mu)}{\sin(180^\circ - 2\gamma - \mu)} = \frac{\sin(\gamma+\mu)}{\sin(2\gamma+\mu)} =$$

$$= \frac{\sin\gamma\cos\mu + \cos\gamma\sin\mu}{2\sin\gamma\cos\gamma\cos\mu + (\cos^2\gamma - \sin^2\gamma)\sin\mu} =$$

$$= \frac{\sin\gamma + \cos\gamma\tan\mu}{2\sin\gamma\cos\gamma + (\cos^2\gamma - \sin^2\mu)\tan\mu} = \quad \text{mit (1)}$$

$$= \frac{\sin\gamma + \cos\gamma\dfrac{\sin\gamma}{p - \cos\gamma}}{2\sin\gamma\cos\gamma + (\cos^2\gamma \quad \sin^2\gamma)\dfrac{\sin\gamma}{p - \cos\gamma}} =$$

$$= \frac{1 + \dfrac{\cos\gamma}{p - \cos\gamma}}{2\cos\gamma + (\cos^2\gamma - \sin^2\gamma)\dfrac{1}{p - \cos\gamma}} = \frac{p}{2p\cos\gamma - 1}.$$

Läßt man γ gegen Null gehen, so geht dieser Ausdruck gegen $\frac{p}{2p-1}$.

Sollte die Inversion am Kreis eine aus der Reflexion resultierende Abbildung sein, so müßte der letzte Ausdruck gleich 1:p sein. D.i.aber offenbar nur für p = 1 der Fall.

Die Inversion hat also mit der Kugelspiegelung nichts zu tun.

Literatur:

[1] Benz W. : Vorlesungen über Geometrien der Algebren, Springer Berlin 1973

[2] Escher M.C.: Collection Haags Gemeentemuseum, Den Haag

[3] Dembowski, P.: Finite Geometries, Springer Berlin 1968

[4] Knopp, K.: Elemente der Funktionentheorie, Sammlung Göschen Band 11o5 Berlin 1955

[5] Mäurer, H.: Kreisspiegelungen in Möbiusebenen, Geom. Ded.2 Seite 261 - 268 (1973) u.a.

[6] Meyer, Kh.: Zur spiegelungstheoretischen Kennzeichnung von Miquelebenen mit Berührbüschelsatz, aus Beiträge zu Geometrischen Algebra, Birkhäuser Basel 1977 Seite 269-274

[7] Zeitler, H.: (K,L)-Spiegelungen in Miquelebenen mit Berührbüschelsatz (Dissertation Gesamthochschule Kassel 1978).

[8] Zeitler, H.: Kreisgeometrie in Schule und Wissenschaft oder ..... Didaktik der Mathematik 3 (1983) Seite 169- 201.