M A T H E M A T I K I N F O R M A T I O N

Gymnasium Starnberg

Fachbereich Mathematik

Nr. 12

10. 1. 1984

M A T H E M A T I K S E M I N A R N A C H M I T T A G A M 14.12.1983

AM GYMNASIUM STARNBERG

Auf Wunsch einiger Schüler, die offenbar unser 1.Mathematikseminar im Bildungszentrum Erlangen der Siemens AG in recht guter Erinnerung behalten haben, entschlossen sich drei Lehrer des Fachbereichs, an einem Nachmittag mit Schülern am Rande des normalen Curriculums ein wenig Mathematik zu machen. Zu spät wurde festgestellt, daß der Veranstaltungstermin mit einer ganzen Reihe von anderen Veranstaltungen kollidierte und so vielen Schülern der Besuch nicht möglich war; deshalb teilen wir schon heute mit:

2. Mathematikseminar des Gymnasiums Starnberg findet statt

vom 7. 3. bis 10. 3. 1984 bei der Siemens AG in Berlin.

Die Finanzierung scheint bei einer angemessenen Eigenbeteiligung der Schüler abgeschlossen. Einzelheiten werden während der nächsten Tage über die Mathematiklehrer mitgeteilt werden. An dieser Stelle bedanken wir uns bereits für die erneute großzügige Unterstützung durch die Siemens AG und unseren Elternbeirat.

Es folgt die <u>Dokumentation des Mathematikseminarnachmittags am 14.12.1983</u>

<u>Teilnehmer:</u>

Leitung: Dr. Karlhorst Meyer, StD.
weitere Vortragende: Heimo Gnilka, StR.
Bernd Ulitzka, OStR.
weitere teilnehmende Lehrer:
Richard Mertenbacher, StR z.A.
Johann Hilmer, StR

Statistik der beteiligten 15 Schülerinnen und Schüler:

Jahrgangsstufe	9	10	11	K12	K13
Mädchen	0	0	1	2	2
Buben	0	3	6	0	1

Heimo Gnilka:

Ungleichungen

Grundsätzlich sei bemerkt, daß Ungleichungen jeden Studierenden der Mathematik, Informatik oder einer Naturwissenschaft beschäftigen. Dabei ist der Beweis einer Ungleichung oder Abschätzung so anzulegen, wie jeder direkte Beweis allgemein zu führen ist:

> Ausgehend von einer richtigen Voraussetzung wird durch schrittweise Umformung die Behauptung hergeleitet.

Beispiel: Behauptung: $a + b \geq \sqrt{2ab}$ für alle a,b aus $\mathbb{R}^+$.

Beweis: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a + b \geq \sqrt{2ab}$, letzteres, weil a und b größer O ist.W.z.b.w.

Dabei erkennt man, daß oft eine äquivalente Umformung der Behauptung die Lösung wesentlich vereinfacht.

Eine oft zweckmäßige Beweisalternative ist die folgende:

> Man versammelt alle Terme auf einer Ungleichungsseite und zeigt z.B. deren Positivität.

Beispiel: Die obige Behauptung wird auf die äquivalente Form $(a + b)^2 - 2ab \geq 0$ gebracht.

Beweis: $(a + b)^2 - 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2 \geq 0$ w.z.b.w.

Die folgenden Tricks haben sich als zweckmäßig erwiesen:

Trick 1: Kleinere Terme werden durch offensichtlich gröbere ersetzt und umgekehrt.

z.B.: $0 < a < b \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{a + b} < \frac{ab + b^2}{a + b} = \frac{b(a + b)}{a + b} = b$; also gilt:

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} < b.$$

Trick 2: Man addiert und subtrahiert Terme.

z.B.: a) $\frac{x}{1 + x} = \frac{x + 1 - 1}{x + 1} = \frac{x + 1}{x + 1} - \frac{1}{x + 1} = 1 - \frac{1}{1 + x}$.

b) $a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab + 2ab = (a - b)^2 + 2ab \geq 2ab$, da das Quadrat einer reellen Zahl immer positiv ist.

Beispiel a) zeigt zudem die Umkehrung des Brüchezusammenfassens:

Trick 3: $\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

Beispiel b) zeigt:

Trick 4: Offensichtlich positive Terme dürfen hinzugefügt (weggelassen) werden, um einen größeren (kleineren) Term zu erhalten (Abschätzungsprinzip).

Diese Überlegungen werden in Berlin fortgesetzt werden. Bitte diese Schrift aufheben und mit nach Berlin nehmen.

Das am Mathematikseminarnachmittag ausgeteilte Übungsblatt hierzu befindet sich im Anhang der Dokumentation.