Aufgabenblatt 4: Gnilka

Zur vollständigen Induktion:

1. Zeige, daß $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$ a) durch Indexverschiebung über den Ansatz $1 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = (2-1) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 2^i$; weiter mit dem Distributivgesetz.
   b) mit vollständiger Induktion (siehe 2d)).

2. Beweise mit vollständiger Induktion:

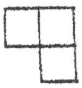
   a) $\sum_{k=p}^{n} k = \frac{(n+p)(n-p+1)}{2}$ b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ c) $2^n > n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

   d) $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, $x \neq 1$ e) Zeige, daß 1) ein Sonderfall von d) ist.

   f) Jede Zahl der Form $n^k - 1$ ist durch $n-1$ teilbar. Führe den Beweis zunächst für z.B. $n = 5$.

   Alle hier benutzten n, k sind aus $\mathbb{N}$.

3. Sei M eine nicht leere Menge der Mächtigkeit $|M|$. Dann gilt für die Mächtigkeit der Potenzmenge (d.i.die Menge aller Teilmengen) $\mathfrak{P}(M)$:
   $|\mathfrak{P}(M)| = 2^{|M|}$, wenn M eine endliche Menge ist.

4. Eine quadratische Fläche der Seitenlänge 2^n ist schachbrettartig in Einheitsquadrate unterteilt. Eines der Einheitsquadrate wird entfernt. Man zeige, daß die verbleibende Fläche stets durch Platten der Form , bestehend aus drei Einheitsquadraten, lückenlos und überschneidungsfrei bedeckt werden kann (B 82/1).

5. In einem Land gibt es nur Einbahnstraßen. Zwischen irgend zwei Städten besteht eine und nur eine direkte Straßenverbindung. Zeige, daß es eine Stadt gibt, die von jeder anderen Stadt aus direkt oder indirekt über höchstens eine zweite Stadt erreicht werden kann (B 71/2).

6. An einem Schachturnier nehmen p Personen teil ($p > 2$), bei dem jeder mit jedem Spieler nur einmal zu spielen hat. Nachdem n Spiele gespielt sind, ist folgende Situation eingetreten: kein Spiel ist im Gang, und in jeder Teilmenge von drei Spielern können mindestens einmal zwei Spieler gefunden werden, die noch nicht miteinander gespielt haben. Zeige, daß $n \leq p^2:4$ ist (B 72/2).

7. Beweise: Die Terme $p_s(x) = x^{6s+2} + x^{3s+1} + 1$ und $q_s(x) = x^{6s+4} + x^{3s+2} + 1$ sind durch $x^2 + x + 1$ teilbar (B 82/2).

Ungleichungen:

8. Beweise: a) Für $a, b, c \geq 0$ gilt: $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.
   b) Für reelle a, b, c gilt: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

9. Seien a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks; ferner sei $R := a^2 + b^2 + c^2$ und $S := (a + b + c)^2$. Man zeige, daß stets $\frac{1}{3} \leq \frac{R}{S} < \frac{1}{2}$ gilt (B 78/2).

Heimo Gnilka:

Vollständige Induktion

Da die vollständige Induktion ein schlagkräftiges Beweisverfahren der
modernen Mathematik ist, war es unumgänglich, dieses Thema mit zum
Gegenstand unseres ersten Mathematikseminars zu erwählen.
Das Problem dieses Unterrichts lag vor allem darin, daß die vollständi-
ge Induktion etwa 60% der beteiligten Schüler anhand einfacher Beispie-
le bereits bekannt war, während alle anderen noch nie etwas davon gehört
hatten. So war ich gezwungen, einfache und aussagekräftige Beispiele zu
wählen, die z.B. für die Schüler der neunten und zehnten Klassen geeig-
net waren, das Verfahren selbständig, auch außerhalb des Vortrages, ein-
zuüben. Die Resonanz hat gezeigt, daß gerade hier die Probleme in der
Erfassung einer abstrakten Theorie zu Tage treten: Einzelne haben sich
anschließend sehr mit dem zur Verfügung gestellten Aufgabenmaterial be-
faßt und konnten nach einigen Zwischenfragen die einfacheren der für sie
ungewohnten Aufgaben lösen.
Allgemein lag der Sinn der Vorführung dieses Verfahrens darin, sich
selbständig weiter mit dieser Theorie anzufreunden und in Zukunft Auf-
gaben nach der Möglichkeit ihrer Anwendung zu untersuchen.
So war ich gezwungen, ein tiefgreifenderes Beispiel - eine Aufgabe eines
vergangenen Bundeswettbewerbs Mathematik - herauszugreifen, um denjeni-
gen, die das Verfahren schon kannten, klar zu machen, daß oft nicht so
einfach zu erkennen ist, ob Induktion überhaupt durchgeführt werden kann.
Bei der Durchführung der vollständigen Induktion eröffnen sich immer
wieder scheinbar unüberwindbare Hürden; doch konnten meines Erachtens
die Schüler erkennen, daß bei Behauptungen im Bereich der natürlichen
Zahlen dieses Verfahren als Wegweiser für Beweise angesehen werden kann.
Gerade hier werden oft die Beweise recht einfach, wo man mit anderen

Methoden nur sehr schwer zum Ziel kommen kann. Ein Beispiel hierzu ist Aufgabe 4. des Aufgabenblattes 4.
Auch das Thema vollständige Induktion konnte nicht bis zur Beherrschung diskutiert und eingeübt werden. Ein Denkanstoß für diejenigen, die sich ernsthaft mit den Aufgaben des Bundeswettbewerbs beschäftigen, war es allemal. Vielleicht kann man in einem späteren Seminar nochmals auf dieses Thema zurückkommen.