Aufgabenblatt 3: (Smolka)

Aufgaben aus der Zahlentheorie:

1. Kann eine gerade (ungerade) Zahl durch eine ungerade (gerade) Zahl teilbar sein?
2. t teilt a aber teilt nicht b. Zeige, daß dann t auch $(a \pm b)$ nicht teilt!
3. Teilt eine Primzahl p ein Produkt mn, so teilt p den Faktor m oder n.
4. Gibt es eine höchste Primzahl und damit endlich viele Primzahlen?
5. Beweise: Die Zahl $p = 2^n - 1$ ist höchstens prim, wenn n prim ist.
6. Beweise: Die Zahl $p = 2^n + 1$ ist höchstens prim, wenn n eine Potenz von 2 ist.
7. Beweise, daß eine natürliche Zahl durch 9 teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
8. Seien a, b, c, d aus $\mathbb{N}$ mit $ab = cd$. Dann ist $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ nicht prim.
9. Man zeige, daß keine Zahl der Folge 10001, 100010001, 1000100010001, ... eine Primzahl ist.
10. Teilt eine Primzahl p eine Quadratzahl a, so ist auch p^2 Teiler von a.
11. Welche Einerziffern kann eine Quadratzahl haben?
12. Welche Viererreste (Dreierreste) kann eine Quadratzahl haben?
13. Eine natürliche Zahl besitzt eine tausendstellige Darstellung im Dezimalsystem, bei der höchstens eine Ziffer von 5 verschieden ist. Zeige, daß sie keine Quadratzahl ist.
14. Zeige:
$$z = 5 \cdot \frac{10^k - 1}{9} + 1 \text{ mit } k \in \mathbb{N} \text{ ist keine Quadratzahl.}$$
15. Welche Zahlen muß man mit 5 multiplizieren, damit das Produkt durch 13 mit dem Rest 7 teilbar ist?
16. Zeige, daß $2^{32} + 1$ durch 641 teilbar ist (Hilfe: $2^4 + 5^4 = 5 \cdot 2^7 + 1$)!
17. Es gibt keine natürliche Zahl n der Form $n = 8k + 7$ mit $k \in \mathbb{N}$, die Summe von drei Quadratzahlen ist.
18. An einer im Zehnersystem geschriebenen natürlichen Zahl seien die folgenden Veränderungen gestattet:
    a) Am Ende der Zahl die Ziffer 4 anhängen.
    b) Am Ende der Zahl die Ziffer 0 anhängen.
    c) Die Zahl durch 2 teilen, wenn sie gerade ist.
    Man zeige, daß man ausgehend von 4 durch die Veränderungen a) b) c) jede natürliche Zahl erhalten kann.
19. Beweise: Für jede natürliche Zahl n gibt es eine n-stellige Zahl im Dezimalsystem aus den Ziffern 1 und 2, die durch 2^n teilbar ist.
20. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von 299 und 667 möglichst effizient!

Methoden nur sehr schwer zum Ziel kommen kann. Ein Beispiel hierzu ist Aufgabe 4. des Aufgabenblattes 4.
Auch das Thema vollständige Induktion konnte nicht bis zur Beherrschung diskutiert und eingeübt werden. Ein Denkanstoß für diejenigen, die sich ernsthaft mit den Aufgaben des Bundeswettbewerbs beschäftigen, war es allemal. Vielleicht kann man in einem späteren Seminar nochmals auf dieses Thema zurückkommen.

Peter Smolka:

Einführung in die Teilbarkeitslehre

1. Allgemeines: Die im Seminar mit den Schülern erarbeitete Teilbarkeitslehre sollte in der Demonstration des Theorieaufbaus den Schülern helfen, die spezifischen Probleme der Zahlentheorie darstellen zu lernen. Gerade den jüngeren Schülern sind die meisten Teilbarkeitsprobleme bereits aus Zahlenbeispielen und Plausibilitätsbegründungen des Unterrichts bekannt, weniger jedoch die exakte Formulierung der Beweise, wie sie der Bundeswettbewerb fordert.
Die kurzen und einfachen Beweise der dargestellten Teilbarkeitslehre gestatten eine klare Erläuterung der Beweisprinzipien. So wurde wiederholt auf das Prinzip des Widerspruchsbeweises zurückgegriffen und die Problematik der Umkehrbarkeit von Aussagen hervorgehoben. Für die zukünftigen Seminare ist eine ausführliche Beschäftigung mit Primzahlen und mit dem Rechnen in Restklassen geplant.

2. Inhalt des Unterrichts:

2.1 Zahlensysteme: Darstellung natürlicher Zahlen im Dezimalsystem
$z = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$ mit der Quersumme $Q(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i$, wobei $a_i \in \{0,1,2,...,9\}$,
sowie Darstellung durch die Endstellen:
$z = 10z' + a_0$ mit $a_0 \in \{0,1,2,...,9\}$ beziehungsweise
$z = 100z' + a'$ mit $a' \in \{0,1,2,...,99\}$.
Verallgemeinerung:
$z = \sum_{i=0}^{n} a_i r^i$ mit $a_i \in \{0,1,2,...,r-1\}$ und Veranschaulichung am 2-er und 5-er System mit Zahlenbeispielen zur Addition in verschiedenen Zahlensystemen und zur Umrechnung zwischen den Zahlensystemen.

2.2 Teilbarkeit: $\mathbb{Z}$ sei die Menge der ganzen Zahlen, $\mathbb{N}$ die der natürlichen.

Definition: $a, b \in \mathbb{Z}$; wir schreiben $a|b$, wenn es ein $q \in \mathbb{Z}$ mit $b = qa$ gibt, d.h. wenn b ein Vielfaches von a ist. Wenn $a \nmid b$, dann ist a Nichtteiler von b.

Folgerungen:

1. $a|b \Rightarrow |a| \mid |b|$; Zurückführbarkeit der Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$ auf die Teilbarkeit in $\mathbb{N}$.
2. $a,b \in \mathbb{N}$ und $a|b \Rightarrow a < b \Rightarrow$ b hat höchstens b Teiler.
3. $a|b \Rightarrow b = qa \Rightarrow q = \frac{b}{a}|b$.

Definition: Ist $b = qa$, so heißen q und a komplementäre Teiler von b.

Folgerung 4.: $a = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$; $x \geq \sqrt{a}$ und $x|a \Rightarrow x\cdot\sqrt{a} \geq a = qx \Rightarrow q \leq \sqrt{a} \Rightarrow$
Soll eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ auf Teilbarkeit untersucht werden, so genügen Teiler $t \leq \sqrt{a}$.

Definition: $a \neq 0$ und 1 heißen triviale Teiler von a.

__Definition:__ Jede natürliche Zahl $p > 1$, die nur triviale Teiler besitzt, heißt Primzahl. Sonst spricht man von zusammengesetzten Zahlen.

__2.3 Teilbarkeitsregeln:__ Die Teilbarkeitsbeziehung besitzt die Eigenschaften:
$a|a$ Reflexivität,
$a|b$ und $b|c \Rightarrow a|c$ Transitivität,
$a|b$ und $b|a \Rightarrow a = b$ Antisymmetrie.

__Regel I:__ $a|b \Rightarrow a|bc$; $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Beweis: $b|bc$ und $a|b \Rightarrow a|bc$ (Transitivität).
Vorsicht: Aus $a|bc \not\Rightarrow a|b$ oder $a|c$.

__Regel I':__ $a \nmid b \Rightarrow ca \nmid b$.

Beweis: Annahme: $ca|b \Rightarrow b = (qc)a \Rightarrow a|b$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
D.h. die Annahme ist falsch $\Rightarrow ca \nmid b$.

__Folgerung:__ Eine ungerade Zahl kann keine geraden Teiler haben.

Beweis: b sei ungerade $\Rightarrow 2 \nmid b \Rightarrow$ gerade Zahl $2n \nmid b$.

__Regel II:__ $a|b \Rightarrow ac|bc$; $c \in \mathbb{N}$.

Beweis: $b = qa \Rightarrow bc = (cq)a$ w.z.b.w.

__Regel III:__ $t_1t_2|b \Rightarrow t_1|b$ und $t_2|b$.

Beweis: $b = q(t_1t_2) = (qt_1)t_2 = (qt_2)t_1$ w.z.b.w.
Vorsicht: Die Umkehrung gilt nicht; z.B. $12|36$ und $6|36$, aber $12 \cdot 6 \nmid 36$.
Ist aber $t_1|a_1$ und $t_2|a_2$, also $a_1 = q_1t_1$ und $a_2 = q_2t_2$, dann ist $a_1a_2 = q_1t_1 \cdot q_2t_2 = q_1q_2t_1t_2$.

__Regel IV:__ $t_1|a_1$ und $t_2|a_2 \Rightarrow t_1t_2|a_1 \cdot a_2$.

Auch hier ist die Umkehrung falsch: $4 \cdot 15|30 \cdot 6$ aber weder $4|30$ noch $15|6$.
Leider ist Regel IV nicht auf die Addition übertragbar: $4|8$ und $3|9$ aber $4+3 = 7 \nmid 8+9 = 17$, also aus $t_1|a_1$ und $t_2|a_2 \not\Rightarrow t_1+t_2 \mid a_1+a_2$.
Es gilt aber:

__Regel V:__ $t|a_1$ und $t|a_2 \Rightarrow t|a_1 \pm a_2$.

Beweis: $a_1 = q_1t$ und $a_2 = q_2t \Rightarrow a_1 \pm a_2 = (q_1 \pm q_2)t$ w.z.b.w.
Vorsicht: Umkehrung gilt nicht: $2|3+5$ aber $2 \nmid 3$ und $2 \nmid 5$.

__Regel V':__ $t|a_1$ und $t|a_2 \Rightarrow t|ma_1 \pm na_2$ mit beliebigen $m,n \in \mathbb{N}$.

Beweis: $t|a_1 \Rightarrow t|ma_1$ und $t|a_2 \Rightarrow t|na_2 \Rightarrow t|ma_1 + na_2$.

__Regel VI:__ $t|a$ und $t \nmid b \Rightarrow t \nmid a \pm b$ oder
$t|a$ und $t|a \pm b \Rightarrow t|b$.

Beweis: Annahme: $t|a \pm b$ und $t|a \Rightarrow (tq_1 = a \pm b$ und $tq_2 = a) \Rightarrow$
$\Rightarrow t(q_1 - q_2) = \pm b$ Hieraus folgt entweder, falls $q_1 \neq q_2$ ist, $t|b$ oder, falls $q_1 = q_2$ ist, $b = 0$. In jedem Fall erhält man einen Widerspruch.

__3. Besprochene Aufgaben von Aufgabenblatt 3:__

1. (vergl.Nr.8 S.7): $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ mit $ab = cd$, dann ist $a^k + b^k + c^k + d^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ nicht prim.
2. Teilbarkeit einer Zahl durch 2, 4, 5, 8, 9.
3. (vergl.Nr.5 Seite 7): MERSENNEsche Zahlen als Primzahlen der Gestalt $p = 2^n - 1$.

__4. Abschließende Bemerkungen:__

Wie bereits auf Seite 1 festgestellt wird, beteiligten sich die Schüler auch in der Teilbarkeitslehre sehr engagiert. In Gesprächen nach diesem

Unterricht äußerten sie ihre Freude an der Durchsichtigkeit der dargestellten Teilbarkeitslehre. Schüler, welche bereits mehrmals am Bundeswettbewerb beteiligt waren, sich also bereits Kenntnisse auf diesem Gebiet angeeignet hatten, waren wohl eher unterfordert. Dies ließ sich jedoch bei dem großen Vorbildungsgefälle der Schüler nicht vermeiden und war nicht so störend, da auch für die fortgeschrittenen Schüler die Geschlossenheit und die Methodik des Aufbaus reizvoll waren. Auch die Zusammenstellung der gefundenen Regeln wird ihrer weiteren Arbeit sicher hilfreich sein. Schließlich konnten die versierteren Schüler ihren Ehrgeiz an den besprochenen Aufgaben und den darüber hinaus angebotenen befriedigen.
Insgesamt war das Erleben der Arbeitsfreude bis in die späten Abendstunden hinein für die Lehrer eine beglückende Erfahrung, die überraschte, da dieser Eifer im normalen Schulalltag untergeht. Hier zeigte sich, daß die Schule im normalen Unterrichtsbetrieb den Wissensdurst vieler Schüler nicht stillen kann. Die Dankbarkeit, die bei Abschluß des Seminars von den Teilnehmern den Lehrern gegenüber ausgedrückt wurde, ist nicht nur Zeichen des Erfolgs dieses Seminars, sondern auch ein Votum für die Fortführung des beschrittenen Weges.

Literatur:

Scholz, Arnold: Einführung in die Zahlentheorie, Sammlung Göschen Bd.5131 5. Auflage.

Bartel, Hans: Zahlentheorie und (Zahl)zeichensysteme, Vogel Verlag.