M A T H E M A T I K I N F O R M A T I O N
GYMNASIUM STARNBERG
FACHBEREICH MATHEMATIK

(55)

NR. 10
10. FEBRUAR 1983

Geometrie, vielfältiger und lebendiger denn je [1])

Karlhorst Meyer

Kurzfassung [26]: Es gibt Leute, die sprechen vom "Tod der Geometrie" (ZEITLER [30]), andere vom "Misthaufen Geometrie" (DIEUDONNÉ): dann kam die Wiederbelebung der Geometrie (Bundestagung 1983 [32]). Hierbei scheint es gar nicht in erster Linie um Tod oder Leben zu gehen, sondern um den alten Streit: "Was ist Geometrie". Sollen dies die Ergebnisse von MONGE, REULEAUX [29] bis hin zur Wiener Schule WUNDERLICH, HOHENBERG, BRAUNER und VOGLER sein oder hat man Geometrie mit den Ergebnissen der Schulen von SPERNER und BACHMANN gleichzusetzen? Ist Geometrie im Anschauungsraum unserer Umwelt oder ist sie Grundlagenforschung pathologischer Algebren?
Sie ist beides, und deshalb beschäftigen sich heute so viele mit dieser Disziplin wie nie zuvor: Ingenieure, Architekten, Künstler, Physiker, Chemiker, Mediziner und Biologen, auch Mathematiker.

Welche Konsequenzen ergeben sich für die Schule, wenn man die neueren Tendenzen des Mathematikunterrichtens (vergl. [24]) berücksichtigt: Kindgerechtes Unterrichten, vom Konkreten zum Abstrakten, Einbau der 3-dimensionalen Geometrie des Anschauungsraumes ins Curriculum, u.a.m.-

Was erfüllen hiervon die derzeitigen Curricula, was kann man verbessern.

1. Wie lebendig ist Geometrie:

Da die Didaktiker oft das Zitieren um jeden Preis lieben, möchte auch ich mit einem Zitat HENRY CARTANs, einem der Begründer von NICOLAS BOURBAKI beginnen:

"Es gibt keine Regel in der Mathematik, um zu entscheiden, was interessant ist. Nur eine tiefe Kenntnis der schon vorhandenen Theorien, eine feine Kritik der Probleme oder eine plötzliche unerwartete Intuition macht es dem Forscher (Lehrer?) möglich, ein zweckmäßiges Axiomensystem zu wählen. Ein solches System wird zweckmäßig sein, wenn es bei verschiedenen Gelegenheiten benutzt werden kann. So kommt man zu der Frage: Welche Begriffe muß man als wichtig und fundamental betrachten? Die Geschichte der Mathematik lehrt uns, daß die Einsicht darüber erst a l l m ä h l i c h wachsen kann, und zwar auf Grund der Erfahrungen."

Ich will deshalb beginnen, zu berichten, welch vielfältige Erfahrungen mit Geometrie ich während der letzten 20 Jahre machen konnte, um so zu zeigen, wie lebendig offenbar Geometrie ist. In einem 2.Teil werde ich auf die Konsequenzen zu sprechen kommen, die im Bildungsbereich zu ziehen sind.

---

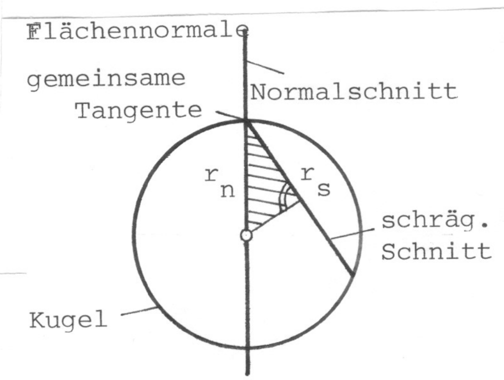
[1]) Vortrag auf der 17.Bundestagung für Didaktik der Mathematik, Koblenz 1983
Gleichzeitig Grundlage des Arbeitskreises: "Welche Aufgaben fallen der lebendigen Geometrie im Rahmen der neuen Unterrichtstendenzen zu" dieser Bundestagung.

In der obigen Kurzfassung sieht es so aus, als stünden sich in der Geometrie zwei Blöcke gegenüber: die klassische Geometrie im Anschauungsraum und die moderne axiomatische, oder auch eine sogenannte konkrete einerseits und andererseits eine abstrakte Geometrie. Um hier von Anfang an Mißverständnissen vorzubeugen, zitiere ich nochmals H.CARTAN: "Ich möchte betonen, daß die Unterscheidung zwischen "konkret" und "abstrakt" in der Mathematik mir nicht klar zu sein scheint. Wenn es eine Grenze zwischen dem Konkreten und dem Abstrakten gibt, so ist sie jedenfalls von der Zeit und den Mathematikern abhängig. Wenn ein jeder von uns sich Rechenschaft ablegt über seine eigenen Erfahrungen, so wird er erkennen, daß das "Konkrete" genau dasjenige ist, das er gelernt hat und mit dem er sich solange beschäftigt hat, bis er eine gewisse Vertrautheit damit erlangte; das "Abstrakte" aber sind die neuen Ideen, die noch nicht in seine Gedankenwelt eingedrungen sind. Auch der Begriff des "konkreten Problems" scheint mir nicht klar zu sein: wie soll man den konkreten Charakter eines Problems messen? Muß man unbedingt eine gewisse Verachtung für "abstrakte" Probleme zur Schau tragen, wenn man sie vielleicht als gekünstelte Fragen ansieht, mit deren Untersuchung sich ein vernünftiger Mathematiker nicht abgibt?"
Deshalb will ich zunächst einmal sehr "konkret" werden:

Immer weniger spielt z.B. im Ingenieurwesen die Intuition, immer öfter gediegene Kenntnisse z.B. in der Geometrie eine Rolle:

Bild 1[1] zeigt schon beinahe eine Alltäglichkeit für uns: Einem Mechaniker, der Motoren repariert, ergänzt und wieder zusammenbaut - im Bild der WANKELmotor - muß man in anschaulicher Form den Zusammenhang der Einzelteile beschreiben. Macht man hier nur irgendein Schrägbild, wie es leider auch seitens einiger Autofirmen passiert, so ergeben sich oft für den Betrachter recht unnatürliche Bilder. Perspektive Darstellungen oder Photographien würden die weiter hinten gelegenen Teile so sehr verkleinern, daß der Mechaniker sie nicht mehr in ihrer natürlichen Größe erkennen kann. Um zu einem guten Bild zu kommen, muß man die speziellen Eigenschaften des menschlichen Auges, des Sehvorgangs kennen, andernfalls entstehen "verzerrte" Bilder.

Nicht ganz so leicht ist der Konstruktionsvorgang beim nächsten Bild (Bild 2), wo es gilt, die aus strömungsmechanischen Bedingungen der Physik gewonnene Schraubfläche mathematisch so darzustellen, daß Handwerker ihre Form herstellen können. Hierbei geht es nicht nur um das Zeichnen schöner Bilder. So haben zwar MONGE, DUPIN und andere bereits das Krümmungsverhalten von Flächen recht anschaulich darstellen können: Wie man leicht mit Trigonometrie oder anderem verifizieren kann, ist bei einer Kugel der Zusammenhang zwischen dem Krümmungsradius einer Schnittkurve, deren Schnittebene die Flächennormale enthält (genannt Normalschnitt), und dem Krümmungsradius einer Schnittkurve, die die Normale nicht enthält (genannt Schrägschnitt), die aber eine gemeinsame Flächentangente haben (in der nebenstehenden Zeichnung als Punkt zu sehen) durch das schraffierte rechtwinkelige Dreieck gegeben. Dieser Zusammenhang gilt nicht nur bei der Kugel, sondern tritt bei jeder "glatten" Fläche auf. Der Terminus "glatt" weist bereits auf den differentialgeometrischen Hintergrund hin. Umfassende Kenntnisse hiervon sind erforderlich, um eine optimale Schiffsschraube zu bauen.



Die Abwicklungsaufgaben der Darstellenden Geometrie waren sicher eine technische Übertreibung, die bestenfalls der Schulung der Raumanschauung und dem Begreifen des"Theorema egregium" von GAUSS dienten; geht es jedoch um den zukünftig zu bauenden Satelliten zwischen Mond und Erde, so kommt es wegen der immensen Transportkosten darauf an, auf hundertstel Millimeter genau vorbereitete Teile hochzuschießen, die z.B. beim Übergang zwischen dem Rotationskegel in der Mitte und den drei Speichen aus Rotationszylindern im Bild 3 (hier algebraische Raumkurve 4.Ordnung) samt Abwicklungen genauestens konstruiert sein müssen. Es geht nicht mehr an, daß nach alter Manie Blechschlosser mit der Schere vor Ort einpassen oder Schweißer wie im Schiffsbau durch überdimensionierte Schweißnähte"schwindeln". Die Theorie der klassischen algebraischen Geometrie, wie auch Differentialgeometrie stehen Pate.

Bild 4 zeigt einen abwickelbaren Übergang (genannt Torse) zwischen einem quadratischen Querschnitt und einem Kreis. Wie man so etwas konstruiert, zeigt Bild 5, wo ein solcher Vorgang zwischen einem vertikalen Zylinder und einer algebraischen Raumkurve 4.Ordnung, die sich im Grundriß als Ellipse zeigt, als Übungsaufgabe von angehenden Maschinenbauingenieuren konstruiert wird. Das vorliegende Beispiel oder ein analoges zeichnen derzeit jährlich ca 5000 Studenten allein in Deutschland.

Bild 5 bringt die Konstruktion einer "Lederhose", d.h. die Verschneidung zweier Kegel mit einem Zylinder.

In Bild 6 kommen wir zu einer in der Öffentlichkeit weniger bekannten geometrischen Anwendung im Bauwesen, die stark auf Kenntnisse der klassischen projektiven Geometrie zurückgreift.

Bild 6 ist zunächst eine Übungsaufgabe für Vermessungsingenieure: Sie sehen den Nymphenburger Park in München überzogen mit einem sogenannten MÖBIUSnetz, um den Park damit zu "entzerren", also in einer maßstabsgetreuen Zeichnung darzustellen. Mit dieser Methode werden seit BURMESTER u.a. alle Generalstabskarten hergestellt: Stereoaufnahmen von einem Flugzeug, auch Satelliten, aus gemacht, ermöglichen einer technisch mathematischen Assistentin in einer sogenannten Entzerrungsmaschine einen Bleistift visuell längs der Höhenlinien im Gelände zu führen und damit diese Höhenlinien auf der Karte zu zeichnen.

Diese Methode ermöglichte auch, die im 2.Weltkrieg zerstörten historischen Fassaden so gut wie nie zuvor zu rekonstruieren.

Bild 7 ist eine Postkarte des im Krieg zerstörten Dachreiters der Hauskirche der Familie ASAM in der Sendlinger Straße in München. Die Gebrüder ASAM waren weltberühmte Barockbaumeister (Wieskirche u.a.). Bild 8 ist eine Rekonstruktion des Dachreiters anhand der vorher gesehenen Postkarte. Bild 9 zeigt die heute wieder aufgebaute Kirche.

Mit dem Aufkommen von Großrechenanlagen mit unvorstellbar leistungsfähigen Speichern glaubten Informatiker zunächst auf gediegene Kenntnisse in Geometrie zukünftig völlig verzichten zu können. Mit billigsten Verfahren speicherte man Punktdaten, die dann rasch für EDV-gesteuerte Werkzeugmaschinen wie auch für EDV-gesteuerte Zeichenbretter reproduzierbar wurden. Doch wenige Jahre später erkannte man bereits wieder, wie notwendig es ist, geometrische Kenntnisse, ja Raumanschauung auch in der elektronischen Datenverarbeitung zu besitzen, um z.B. Bilder wie die folgenden zu vermeiden (Bild 10 bis Bild 12); bekanntlich nutzte solche Erscheinungen der Künstler ESCHER bei seinen phantastischen Zeichnungen aus, wie dem in Bild 13 gezeigten perpetuum mobile : Das Wasser läuft ohne Energieverbrauch ewig im Kreis und kann so immer die Mühle betreiben. Bloßes Abspeichern von Daten im Rechner reicht nicht aus, um geometrische Probleme damit zu wenn nicht Kenntnisse der linearen Algebra, Differentialgeometrie u.a.m. hinzukommen. Im Bild 14 sind dies vor allem Kenntnisse der klassischen projektiven Geometrie:

Seit dem Bau der Spessartautobahn werden bei der Planung der Trasse die zu erwartenden Sichtverhältnisse mitberücksichtigt. Man konstruiert im kurvigen Gebiet alle 300m einen Schnitt durch die Trasse mit anschließender Perspektive, um die Sichtverhältnisse zu bestimmen.
Bis alle Wünsche erfüllt sind, benötigt ein technischer Zeichner unter der Anleitung eines erfahrenen Bauingenieurs ca 18 Arbeitsstunden im Einzelfall.
Deshalb ging man ab 1970 dazu über, diese Konstruktionen mit einem Standardprogramm für Rechner im Plotter oder Bildschirm durchzuführen.

Schier ins Uferlose steigen die geometrischen Erfordernisse beim Bau eines Schneckengetriebes (Bild 15) und beim Fräsen von Bohrern (Bild 16): Der Fräser muß optimal arbeiten, weshalb er nur längs einer Eingriffslinie den fertigen Bohrer berühren darf (Bild 16).

Niemand bezweifelt, Geometrie ist im Ingenieurwesen lebendig. Die genannten Bilder geben sicher dem einen oder anderen für seinen Unterricht weitere Anregungen.

Geometrie ist aber auch in anderen Berufen meist weniger spektakulär vorhanden, wenn es darum geht, z.B. die kompliziert aufgebauten Genmoleküle exakt zu beschreiben oder z.B. sich drehende Magnetfelder wie etwa bei einer Magnetschienenbahn durch einen Physiker zu erfassen, oder wenn Astronomen sich bei übergroßen Distanzen relativistischer oder MINKOWSKIscher Metrik bedienen. Chemiker und Kristallographen kommen ohne Geometrie nicht aus und ich erinnere in diesem Zusammenhang an die schöne, weil ästhetische Interpretation regelmäßiger Konfigurationen mit Hilfe der Gruppentheorie und umgekehrt, wie dies immer wieder im Werk von COXETER und anderen geschah. Bild 17 zeigt Muster dieser Art, die durchaus mittlerweile in den Anwendungsbereich vorstoßen.

Lebendige Geometrie in Deutschland vorgetragen wäre Flickwerk, wenn man nicht die Algebraisierungswelle miterfassen würde: Jeder denkt hierbei zunächst an die Nachfahren und Schüler D.HILBERTs, die bevorzugt axiomatische Grundlagenforschung machten.
Dies wäre zu einseitig: Erst mit J.DIEUDONNÉs bahnbrechendem Ergebnisbericht "La Géométrie des Groupes classiques" bzw. seinem Buch "Sur les Groupes classiques" und einigen Publikationen war der Aufbruch der Geometrie zur Algebra hin endgültig. Die Geometrie, dank eines Postulats F.KLEINs, das wir alle kennen, mit Gruppentheorie gleichgesetzt, wurde zu einer Teilwissenschaft der Algebra, die ARTIN mit seinem berühmten Buch treffend als "Geometric Algebra"[1] kennzeichnete. Man darf hierbei nur nicht vergessen, daß ARTIN, DIEUDONNÉ wie andere selbst noch auf eine hervorragende klassische Geometrieausbildung, auch im Anschauungsraum, zurückgreifen konnten, wenn sie - um ein Beispiel zu nennen - Sätze wie den folgenden für äußerst allgemeine Räume formulierten:"Jede Bewegung ist Produkt aus involutorischen Bewegungen einfachster Art, genannt Spiegelungen oder besser Transvektionen". Glücklicherweise blieben Restprobleme sehr unangenehm ungelöst, wie etwa das Problem der Körpercharakteristik 2 beim zugrunde gelegten Koordinatenbereich. So konnte gerade die jüngste Entwicklung der geometrischen Algebra deutlich machen, daß nicht algebraische Formalismen, sondern erst gute geometrische Raumvorstellung Strategien bereitstellten, um die in der Algebra unlösbaren Probleme zu erledigen. Nur so ist erklärbar, daß Forscher wie z.B. die BACHMANNschüler, die sehr stark heute in der Algebra verwurzelt sind, nicht finden

konnten, was ZEITLER in [31] (siehe auch [21]) dank seiner geometrischen Vorstellungskraft konstruierte, ein erstes Beispiel einer Spiegelungsgeometrie, in der der Dreispiegelungssatz nicht gilt.

Man kann nicht über lebendige Geometrie reden, ohne auf die breite Entwicklung der Grundlagenforschung dort zu kommen, deren Berechtigung sich aus dem Wunsch nach der Wiederherstellung einer Ordnung, eines überschau-baren Prinzips in der Fülle von Erkenntnissen des 19. Jahrhunderts ableitet. Große Erfolge hatte hier - auch hinsichtlich der Anwendbarkeit - der abbildungsgeometrische Gesichtspunkt und die daraus erwachsene Beweismethode. Ich deutete dies bereits an. Sicher gab es - um nochmals H.CARTAN [9] zu zitieren - hier auch unerwünschte "Fehlentwicklungen", wenn gerade deutsche Grundlagenforscher sich über Jahre hinweg scheinbar nur damit beschäftigten, bestehende Axiomensysteme zu amputieren und nachzuschauen, was noch lebensfähig blieb. Man sollte allerdings hier nicht zu rasch verurteilen: Manchmal standen übergeordnete durchaus echte, ungelöste Probleme im Hintergrund, die nur zu selten bei Publikationen und Vorträgen genannt wurden. Ein solcher Hintergrund,analog zum Bemühen BOURBAKIs,ist,der Vielfalt geometrischer Arbeitsmethoden ein gemeinsames Fundament zu geben.

Jüngere Entwicklungen scheinen zu zeigen, daß neben dem universellen Abbildungsbegriff vor allem der Teilraumbegriff eine tragende Säule der Geometrie liefert. CRAPO und ROTA zeigen in einem leider sehr fehlerhaften Buch "Combinatorial Geometries"[11] (verbessert und erweitert in [17]), daß alle bisher betrachteten Geometrien im Enthalten-seinsverband ihrer Teilräume gemeinsame Eigenschaften haben, die wie 1975 gezeigt - ausreichen zur Schaffung einer Metrik [18] im Anschluß an Arbeiten von BIRKHOFF und J.v.NEUMANN [5],[6]. Ungeklärt ist in dieser Kategorie Geometrie bis heute der Zusammenhang zwischen der Säule Abbildungsgruppe und spezieller Verband im Sinne des Postulats von F. KLEIN.

Auch scheinbar sehr pathologische Geometrien, wie block designs u.ä. fallen unter diese kombinatorischen Geometrien. Hier kehren wir zu den Anwendungen zurück; sie konnten bei Kraftwerksschaltungen, auch Ampelschaltungen u.a.m. wesentlich erfolgreicher als entsprechende Methoden der Analysis angewandt werden. Solche Anwendungen hängen sehr mit einer Äußerung von F.L.BAUER, München,zusammen, die etwa sinngemäß lautet: "Informatik ist nichts anderes als das Studium regelmäßiger geometrischer Konfigurationen."

Eine völlig neue Geometrieentwicklung bahnt sich durch Arbeiten der Italiener Beltrametti [3] und Blasi[4] und anderer an, die mit großem Erfolg Quantentheorieaussagen durch geometrische Ausnutzung der Endlichkeitsverhältnisse des Kosmos beweisbar machen. So hat die seitens Didaktikern immer wieder in Frage gestellte Lehre der endlichen Geometrien in der Quantentheorie eine wichtige Anwendung gefunden.

2, Konsequenzen für die Schulen:

Unser Leben ist durch Handwerk, Technik und Naturwissenschaft stark mit"lebendiger" Geometrie durchsetzt. Geometrie präsentiert sich in diesem Jahrhundert so vielfältig wie nie zuvor. Viele Fragen stürmen deshalb auf den Didaktiker ein: Welche Geometrie sollen wir lehren; wie, wo und wann sollen wir Geometrie lehren. Vor 30 Jahren,als damals die Abbildungsgeometrie modern wurde, meinte man schon einmal, die alte Figurengeometrie wäre nun "falsch" an den Schulen.

Heute, wenn manche von uns bemängeln, daß die Geometrie von der Algebra an der Schule aufgefressen wird, so ist das eine sehr ähnliche Situation zu vor 30 Jahren, die stark vom Standpunkt des Kritikers abhängt. Hatte man damals den Eindruck, daß das Bildungssystem in der Geometrieauswahl zu sehr bei der griechischen Gedankenwelt verharrte, deshalb es unumgänglich schien, mehr als früher das Fundamentale, das Übergeordnete zu lehren und das Modependel zu sehr in Richtung Axiomatik und Algebraisierung ausschlug, so stellt man heute 30 Jahre später in einer nach BAIER kopernikanischen Renaissance [2] fest: Unsere Schulabgänger und Studenten verfügen zwar über eine Fülle von neuem Wissen, nur sind sie leider nicht mehr in der Lage, dieses Wissen an einfachsten Beispielen der Praxis anzuwenden, weil wir, ihre Lehrer, zu wenig Wert auf das Einüben von Verfahren und das Auffinden von Strategien legten.

Auch hier darf ich nochmals an H.CARTAN erinnern, der schon 1959 sagte: "Gewiß, die Wahrheiten der Mathematik sind ewig. Aber es wäre dennoch gefährlich, wollte man den Unterricht, selbst den Elementarunterricht, erstarren lassen: bestimmte Begriffe, die heute allgemein als fundamental anerkannt werden, verdienen es, bereits dem jungen Menschen nahegebracht zu werden, allerdings unter dauernder Bezugnahme auf konkrete Beispiele "; letzteres scheinen wir lange überhört zu haben. Er fährt fort:"Heutzutage ist der elementare mathematische Unterricht vor allem in der Geometrie, noch in einem erstaunlichen Umfang durch die griechische Gedankenwelt beeinflußt. In dem Maße, in dem diese Gedankenwelt heute überholt ist, sollte man auch im Unterricht die neuen Ideen mehr und mehr einführen. Sicherlich wäre es töricht, wollte man alles auf einmal umstürzen." Offenbar hatte man auch diese Äußerung nicht vernommen. CARTAN fährt fort:" Gerade in Deutschland und in Frankreich gibt es für den Unterricht große Traditionen, die es teilweise zu respektieren gilt."

Dieses Zitat macht deutlich: BOURBAKI ist kein Bourbakist: CARTAN weiß 1959 in seiner Rede auf der 76.Sitzung der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen [9] durchaus zwischen den pädagogischen Erfordernissen an Schule und Universität und der Fundierung der Wissenschaft zu unterscheiden. Bemühen wir uns heute, BOURBAKI recht zu verstehen!

Im Hinblick auf den oben genannten Arbeitskreis will ich mit einigen Thesen schließen, die dort diskutiert werden können:

Hierzu muß man zunächst seinen Standpunkt klären, d.h. feststellen, was man mit dem Geometrieunterricht an der Schule beabsichtigt. Ich komme nicht umhin, darauf hinzuweisen, daß es sich hierbei meist gar nicht um geometrisch Spezifisches handelt, sondern ganz allgemein weitgehend um die Absichten der Mathematik an allgemeinbildenden Schulen geht:

I Ziele des Geometrieunterrichtes:

a) Allen Bevölkerungsschichten ist so viel Geometrie zu lehren, wie sie zur Orientierung im Anschauungsraum benötigen.
b) Dies muß insbesondere an Gymnasien (Sekundarstufe I) bei den Abgängern der 10. Jahrgangsstufe im Hinblick auf Berufe, die auf mittlerer Reife aufbauen, und Handwerksberufen, geschehen.
c) Da ein Großteil unserer Abiturienten sich technisch-naturwissenschaftlichen (Medizin eingeschlossen) Studien zuwendet, die zum Teil tiefliegende Erfahrungen im geometrischen Bereich voraussetzen, muß im steten Abgleich mit diesen Studienrichtungen gelehrt werden.
d) Kenntnisse und Verständnis für die Arbeits- und Denkmethoden der Geometrie in Technik, Wirtschaft und Naturwissenschaften sind einer breiten Bevölkerungsschicht weiterzugeben.

e) Die historische Entwicklung der Geometrie zeigt, daß die abendländische Kultur seit den Griechen zumindest den Geometrieunterricht in bestimmter Weise zur Denkschulung benutzte. Solange hierzu nicht gleich qualifizierte Methoden an Stelle der Geometrie treten können, ist es unangebracht, Altüberliefertes zu streichen.
f) Der Geometrieunterricht darf sich nicht nur an seinem heutigen Anwendungsbezug orientieren, um eine Weiterentwicklung zu ermöglichen.
g) Die Gründe a) bis f) implizieren einen methodischen Aufbau, den die Mathematikdidaktikgeschichte überlieferte und den wir erst dann ändern dürfen, wenn wir ihn nachweisbar verbessern können. Dies schließt nicht aus, daß laufend Experimente zur Verbesserung angestrebt werden müssen, deren Experimentcharakter aber im Vordergrund stehen muß, bis der geforderte Nachweis allgemein anerkannt ist.

Die hier dargestellte persönliche "ethische Grundhaltung" stellt für die zu nennenden Konsequenzen, wie man Geometrie zu unterrichten habe, nur <u>eine</u> Entscheidungshilfe dar. Die andere entsteht letztlich aus den Bedürfnissen der Gesellschaft an sich, wie sie sich in den Tendenzen des Mathematikunterrichtsstils, -auch Forschungsstils- als Ergebnisse laufender Diskussionen aller Beteiligter, also Lehrer, Eltern, Schüler, Kammern und Universitäten, Industrie und Wirtschaft präsentieren.
Auch hier werden die folgenden Äußerungen zunächst einmal subjektiv sein. Sie stellen im wesentlichen einen derzeitigen bayerischen Standpunkt [24] dar.

<u>II Grundtendenzen des Mathematikunterrichtes:</u>
a) Der Unterricht orientiert sich in Lernzielen, Lerninhalten und Methoden am Kind. Das Schlagwort "kindgerechtes Unterrichten" darf aber nicht bedeuten, daß allein das Kind das Handeln des Lehrers bestimmt. Der Lehrer lenkt den kindgerechten Unterricht in der Absicht, das Kind gezielt zu fördern, d.h. weiter zu entwickeln.
b) Hierbei geht der Unterricht in Mathematik a l l m ä h l i c h , dieses Wort gilt es zukünftig mehr als in der Vergangenheit zu betonen, vom Konkreten, d.h. von der Erfahrungswelt des Kindes, zum Abstrakten durchaus im Sinne des oben angeführten Zitats von H.CARTAN. Der Lehrer bemüht sich, schließlich ein möglichst hohes Abstraktionsniveau beim Kind zu erzielen. Jedes Mittel, das dieses Ziel näher bringt, ist wünschenswert; so kann im Unterricht auf die vollständige Darstellung aller Beweise verzichtet werden, wenn durch diesen "Mut zur Lücke" Schwerpunkte gesetzt und damit Lehrerfolge gehoben werden können. Abstraktionsgrad wie Arbeitsmethode werden hierbei schulspezifisch bleiben.
c) Auf Grund von a) und b) wird man nicht umhinkommen, in den Unterricht wieder verstärkt die Geometrie des Erfahrungsraumes mit Raumanschauungspflege usw. einzubauen, wie dies seit Jahren gefordert wird [19], [20].
d) Industrie, Handwerk und Universitäten bedauern, daß die Schulabgänger in einer Fülle mathematischen Wissens, das sie aus allgemeinbildenden Schulen beziehen, ersticken und nicht mehr in der Lage sind, damit einfachste Probleme zu lösen. Da der traditionelle Geometrieunterricht sehr stark als übergeordnetes Lernziel das Auffinden von Lösungsstrategien pflegte und nach Streichung dieses Stils keine adäquate Methode gesetzt wurde, gilt es, sich auf Altbewährtes zurückzubesinnen.

Für den zukünftigen Geometrieunterricht ergeben sich hieraus die folgenden

<u>III Konsequenzen:</u>
a) In einer breit angelegten Propädeutik (vergl.[27]) gilt es die z.T. vorschulischen Erfahrungen des Kindes im Anschauungsraum für den zukünftigen Unterricht zu festigen.

b) Ein insbesondere neunjähriger Geometrieunterricht sollte ein gewisses handwerkliches Können im Umgang mit dem Zeichengerät sicherstellen.
c) Da die Schulung im Auffinden von Lösungsstrategien bis heute in der Mathematik im gezielten Vorführen eines geeigneten Beispielmaterials besteht, das im Bereich der Anfängergeometrie vor allem im Zusammenhang mit sogenannten Dreieckskonstruktionen bereitgestellt ist, sollte man gelegentlich auf derartige Aufgaben zurückgreifen. Es ist deshalb sehr begrüßenswert, daß der Bundeswettbewerb Mathematik 1983 [8] ebenfalls solches wiederentdeckte.
d) Für das Finden von Lösungsstrategien benötigt man Einfälle, die sich in der Regel nicht aus Spielen mit den Gesetzen der Logik und geometrischen Axiomen einstellen. Es ist deshalb unerläßlich, saubere Überlegungsfiguren zu fertigen, da nur solche vernünftige Einfälle sichtbar werden lassen.
e) Wenn wieder mehr der alte Weg, der von erstem Konstruieren [28] von Strategien allmählich erst zur Sekundärbeschäftigung der Mathematik, dem Schreiben von Beweisen (vergl.[25]) führt, gepflegt wird, darf das nicht heißen, daß alle Neuentwicklungen der jüngsten Vergangenheit, wie Abbildungsgeometrie u.a.m. (vergl. [22] [23]) nun über Bord geworfen werden. Es geht hier vielmehr nur um eine Entalgebraisierung der Schulgeometrie und ein gezieltes Entfernen von Grundlagenballast, der für allgemeinbildende Schulen unwesentlich ist.
f) Da der Kunsterziehungsunterricht nach wie vor auf das Üben von Freihandskizzen im Anschauungsraum verzichtet, muß hier der Mathematikunterricht zur Hebung der kindlichen Raumanschauung helfend eingreifen.
g) Man sollte sich hüten, einen Unterricht der Darstellenden Geometrie mit den Fehlern, die einst zur Abschaffung dieses Curriculums führten, einzuführen. Das Lehren von räumlicher Geometrie wird sich zwar immer wieder der Darstellungsmethoden der Darstellenden Geometrie bedienen, übersteigt aber und ist unabhängig von dem, das wir Darstellende Geometrie nennen.
h) Da heute an den Schulen bereits eine volle Generation von Lehrern unterrichtet, die über keine Schulung in der Raumgeometrie mehr verfügt, kann man den Geometrieunterricht in den Raum nur fortsetzen, wenn man bereit ist, eine breit angelegte Lehrerfortbildung durchzuführen und einschlägiges Wissen an den Universitäten (vergl.[25]) WIEDER ZU LEHREN!
i) Die Konsequenzen f) bis h) bedeuten nicht den Verzicht auf andere Bereiche der Geometrie. Das wäre eine Fehlinterpretation des Teiles 1 dieser Abhandlung. Eine weitere, erneute Überfrachtung oder auch nur Änderung der Lehrpläne muß auch nicht in der Folge sein, falls die Lehrplanmacher ihre Formulierungen frei von methodischen Empfehlungen machten. Hier geht es nur um die Bereitstellung eines geeigneten Übungsmaterials zur Vertiefung des bisherigen Unterrichtes bei weitgehender Beibehaltung der überall genannten Lerninhalte.
j) Der Geometrieunterricht der Kollegstufe darf in seinem Beispielmaterial bei nicht zu billigen Anwendungsaufgaben stehen bleiben. Die Reifeprüfung muß wieder reichhaltiger werden.
k) Wenn es gilt, vor allem wieder ein Beispielmaterial der Schule bereit zu stellen, was das Einüben von Verfahren und das Auffinden von Strategien pflegt, so ist das eine ernst zu meinende Forderung an alle Schulbuchverlage.

3. Schlußbemerkung:

Es war meine Absicht, in Teil 1 zu zeigen, welche mathematischen Errungenschaften zur Geometrie zu zählen sind. Ich wollte die bunte Palette der Geometrie anreißen. Es konnte nicht mein Wunsch gewesen sein, in Teil 2 alle Gründe und Konsequenzen aufzulisten; ich wollte nur Kollegen anregen, erneut eine Diskussion über den Geometrieunterricht zu beginnen, damit dieser den Erfordernissen unserer Zeit ge-

Literaturverzeichnis:

[1] Artin, E.: Geometric Algebra, Interscience Publ. Inc.,NY 1957

[2] Baier, O.: Vorführung von Demonstrationsmodellen.... Nachr. ÖMG Sonderheft VII Ö.Math.Kongr. Linz 1968 S. 57

[3] Beltrametti,E.G.: Can a Finite Geometry Describe the Physical Space-Time? Atti d.Convegno di Geometria Combinatoria e sue Applicazioni Perugia 1971, Seite 57-62

[4] Blasi,A.A.: Difficulties of a Quantum Mechanics over Finite and p-adic Fields, Atti d.Convegno di Geometrie Comb. e sue Applicazioni Perugia 1971, Seite 63-67.

[5] Birkhoff, G.: Lattice Theory, AMS Coll.Publ. Rhode Island 1967

[6] Birkhoff,G. und J.v.Neumann: The Logic of Quantum Mechanics, Ann. of Math.,37 (1936) No.4 Oct.Seite 823-843

[7] Bourbaki, N.: Éléments de Mathématique, mehrere Bände, Hermann Paris

[8] Bundeswettbewerb Mathematik 1983, Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, Bad Godesberg 1982

[9] Cartan, H.: Nicolas Bourbaki und die heutige Mathematik, Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft 76, Westdeutscher Verlag Köln u.Opladen 1959

[10] Coxeter, H.S.M.: Unvergängliche Geometrie, Birkhäuser Basel 1963

[11] Crapo, H.H. und Rota,G.-C.: On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries (preliminary edition) MIT-Press 1970

[12] Dieudonné,J.: Sur les Groupes classiques, Hermann Paris 1948

[13] :La Géométrie des Groupes classiques, Springer Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955

[14] :Sur les systèmes maximaux d'involutions conjuguées et permutables dans les groupes projectifs, Summa Bras. Math.2 (1950) Seite 59-94.

[15] Hilbert,D.:Grundlagen der Geometrie, Teubner Leipzig und Berlin 1962

[16] Meyer,Kh.: Transvektionsrelationen in metrischen Vektorräumen der Charakteristik zwei, J.f.d.reine u.angew.Math. Bd.233 (1968) Seite 189-199

[17] :Arbeitsgemeinschaft Meyer: Kombinatorische Geometrie Technische Universität München, Abt.Math., Inst.f. Geom. 1.Teil Bericht Nr.7302 (1973)
2.Teil Bericht Nr.7303 (1973)
3.Teil Bericht Nr.7402 (1974)

[18] :Verbandstheoretische Orthogonalität,aus Teorie combinatorie, Roma Acc.Naz.dei Linvei, TomoII, pp281-311

[19] :Vorschläge zu einem Hochschul-Curriculum über Raumanschauung, Beiträge zum Mathematikunterricht Schroedel, Hannover 1978 Seite 195-197

[20] :Stufung der Raumanschauungspflege, Poster auf 3.ICME Karlsruhe 1976

[21] :Zur spiegelungstheoretischen Kennzeichnung von Miquel-

[22] Meyer, Kh.: Über das Miteinander von Abbildungs- und Figurengeometrie, aus Beiträge zum Mathematikunterricht Schroedel Schulbuchverlag 1982 Seite 81

[23] : Über das Miteinander von Abbildungs- und Figurengeometrie, Mathematikinformation Gymnasium Starnberg Nr.7 1.4.1982

[24] : Aktuelle Entwicklungen in der Didaktik der Mathematik Mittgl. der GDM, Nr. 29 (Sept.1982) Seite 9-11

[25] : Räumliche Geometrie in den Klassen 5 bis 9, aus 8.Fachleitertagung für Mathematik 1982 des Deutschen Vereins zur Förderung des math.-naturw. Unterrichts e.V. 1982, Seite 71-85

[26] : Vortragsankündigung 17.Bundestagung f.Did.d.Math. Koblenz 1983

[27] : Propädeutik zur Raumanschauung, mathematiklehrer 3-1982 Seite 29-33

[28] : Erstes Konstruieren und Beweisen in der räumlichen Geometrie, mathematiklehrer, in Vorbereitung

[29] Reuleaux, F.: Die praktischen Beziehungen der Kinematik zu Geometrie und Mechanik, Vieweg & Sohn, Braunschweig 1900.

[30] Zeitler, H.: Der Tod der Geometrie, ZDM , 9-12 (1981), auch The Sugake Seminar, Tokyo 73-77 (1981)

[31] : Über (K,L)-Ebenen, Dissertation Gesamthochschule Kassel, Selbstdruck 1979

[32] Lang : Wiederbelebung der Geometrie, Arbeitskreisankündigung 17.Bundestagung f.Did.d.Math., Koblenz 1983

Anschrift des Autors:

Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
8014 Neubiberg